

531
Б 48

НАУЧНО-
ПОПУЛЯРНАЯ
БИБЛИОТЕКА
МОЛОДОГО
РАБОЧЕГО



Д. М. БЕРКОВИЧ

СИЛЫ ИНЕРЦИИ В ТЕХНИКЕ И ИХ УРАВНОВЕШИВАНИЕ

М А Ш Г И З

Д. М. БЕРКОВИЧ

СИЛЫ ИНЕРЦИИ В ТЕХНИКЕ И ИХ УРАВНОВЕШИВАНИЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1963 Киев

Серия брошюр «Научно-популярная библиотека молодого рабочего» призвана ознакомить молодых рабочих машинностроительных предприятий с различными вопросами современной техники и технологии в машиностроении. Изложенный в популярной форме материал будет способствовать расширению технического кругозора молодых рабочих.

В брошюре «Силы инерции в технике и их уравнивание» приведены основные понятия и законы из области механики, которые поясняются различными практическими примерами.

Изложены вопросы, связанные с использованием в технике сил инерции и моментов инерции, и даны рекомендации по устранению их отрицательного влияния.

Большое внимание уделено вопросу балансировки роторов; описываются методы и средства балансировки и принципы действия балансировочных машин.

Редакционная коллегия:

*К. И. Беспалов, М. С. Комаров, А. Ф. Нефедов,
А. Н. Рабинович, Я. Ю. Шац*

Редактор выпуска д-р техн. наук *М. С. Комаров*

ЮЖНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАШГИЗА
Главный редактор инж. *В. К. Сердюк*

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Первостепенное значение для технического перевооружения всего народного хозяйства имеет развитие **машиностроения**, всемерное форсирование производства автоматических линий и машин, средств автоматики, телемеханики и электроники, точных приборов. Быстрое развитие получают такие конструкции машин, которые, обеспечивая высокие технические свойства, приведут к сокращению расходов сырья и энергии, повышению производительности труда»*.

Большое значение для повышения качества изготовления изделий машиностроительной и приборостроительной промышленности и общей культуры производства имеют излагаемые в данной брошюре вопросы — уравновешивание машин на фундаменте и роторов (вращающихся частей машин), а также балансировка роторов, являющаяся контрольной операцией, завершающей любой технологический процесс изготовления и сборки роторов.

Чтобы читатель мог понять и усвоить эти вопросы, имеющие большое практическое значение, в брошюре даются необходимые элементарные теоретические сведения об основных понятиях и законах классической механики, о силах инерции, как проявлении основного свойства материи — инерции, с которым мы повсеместно сталкиваемся в быту и в технике.

* Программа Коммунистической партии Советского Союза, Госполитиздат, 1961.

ВВЕДЕНИЕ

Самые разнообразные области исследований приводят человека к убеждению, что все окружающее нас, и мы в том числе, представляет собой разные формы движения материи. Зародившаяся еще в древности эта идея материальности мира крепла и совершенствовалась, поднималась на все более высокую ступень достоверности благодаря достижениям науки.

Одной из форм движения материи является перемещение тел в пространстве и во времени, названное *механическим движением*. Механическое движение является наиболее общей формой движения и встречается во всех других формах существования материй. Эта форма движения наиболее явна, наиболее часто встречается, легче всего поддается исследованию, управлению и использованию и поэтому издавна привлекала к себе внимание человеческой мысли. Она стала предметом науки, названной теоретической механикой.

Механическое движение — это движения небесных тел, движения людей и животных, движения отдельных частей-звеньев в механизмах и машинах, перемещения автомобилей, самолетов, судов, дорожных, строительных и сельскохозяйственных машин, это качание маятника стенных часов, вращение шнека мясорубки, возвратно-поступательное движение иглы швейной машины, сложное (вращательное и поступательное) движение детского волчка.

Как в движении вокруг солнца и других небесных тел, так и в работе машин и механизмов, созданных человеком, наблюдается повторение через равные про-

межутки времени одних и тех же движений тел; такое повторение называется *периодичностью*, а движение — *периодическим*. Периодичность движения небесных тел давно наблюдалась и изучалась человеком; она является основой представления о времени и его измерении. Именно периодичность движения подсказала человеку, что должны существовать определенные закономерности в этом движении, навела его на путь вскрытия законов механического движения.

В науке о механическом движении материя получила название *массы*. Масса рассредоточена, размещена по отдельным телам. Все, что окружает каждое тело называется *пространством* или *средой*. В ряде случаев с целью облегчения задачи и ее решения массой пространства пренебрегают, если это не вызывает недопустимых неточностей результатов. Но нельзя забывать, что кроме того, что массы сосредоточены в отдельных телах, пространство между телами также заполнено массой, рассеянной с разной плотностью в разных частях этого пространства.

В результате многовекового опыта обнаружены два основных свойства массы: свойство взаимного притяжения тел, лежащее в основе закона всемирного тяготения, и свойство тела, освобожденного от влияния других тел, сохранять свое состояние покоя или совершать поступательное прямолинейное равномерное движение, при котором все точки тела описывают взаимно параллельные прямые и проходят равные отрезки пути за равные отрезки времени. Второе свойство массы названо ее *инерцией*; оно известно под названием *первого закона Ньютона*, впервые сформулировавшего его, хотя было познано еще Галилеем.

Свойство взаимного притяжения наиболее ярко проявляется в движении небесных тел; на земле оно ощущается в виде земного тяготения. Притяжение же между телами на поверхности земли столь ничтожно мало, что его влияние на движение тел практически не сказывается и не учитывается. Свойство инерции проявляется на земле, хотя непосредственно его наблюдать нельзя, так как полностью освободить какое-либо тело от окружающего его пространства невозможно. Однако в ряде специально поставленных опытов и природных явлений влияние окружающего пространства оказывается весьма

незначительным и свойство инерции проявляется тогда со всей очевидностью.

На своем опыте человек убеждается в том, что всякое резкое изменение его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения связано с изменениями его механических силовых связей с предметами, которых он касается; причем эти изменения вызваны стремлением тела человека сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Разберем несколько примеров. Стоит человек в кузове грузового автомобиля и ни за что не держится; автомобиль трогает с места вперед (даже плавно) и человека как бы отбрасывает назад. Именно «как бы» потому, что фактически его тело стремится остаться на месте, но пол кузова уходит из-под него. Сила трения между подметками и полом удерживает человека, но сохранить его равновесие не может, и человек падает назад или делает шаг назад, чтобы не упасть, или пытается удержаться за борт кузова; следовательно, необходима дополнительная силовая связь между человеком и кузовом. А раз необходима дополнительная силовая связь, значит появились какие-то новые силы, не существовавшие до момента трогания с места; это — силы инерции, развиваемые телом человека. Точно такой же эффект получится, если идущая с постоянной скоростью автомашина резко затормозится или резко увеличит свою скорость. Конечно, можно сказать, что тронувший резко с места автомобиль сбил с ног человека, стоящего в его кузове и не успевшего удержаться за борт; но для того, чтобы автомобиль мог осуществить такое силовое воздействие на человека, необходимо, чтобы и человек воздействовал с той же, но противоположно направленной силой на автомобиль — своей силой инерции. Сидит человек в кабине автомобиля, едущего по прямолинейному горизонтальному участку пути с постоянной скоростью; он действует силой своего веса на сиденье и только легко опирается о левую боковую стенку кабины. Но вот правый поворот — меняется направление движения, меняется направление скорости; человека прижимает к левой боковой стенке кабины, правильнее: стенка давит на человека, отклоняя его от прямолинейного движения. Очевидно, это возможно только потому, что человек сопротивляется этому отклонению своей силой

инерции. Так любое тело сопротивляется силой инерции изменению его состояния покоя или прямолинейного равномерного движения.

Приведем еще в качестве примера такой «фокус». Кусочек картона с лежащей на нем монетой кладут на подушку пальца одной руки и шелкают по краю картона пальцем другой руки так, чтобы не задеть монету и чтобы сила шелчка была направлена в плоскости картона. Фокус считается удавшимся, если картон отлетает, а монета, соскользнув с картона, остается на пальце. Сила инерции монеты оказывается достаточной для того, чтобы преодолеть силу трения между нею и картоном, с которой картон стремится увлечь за собой монету, и она остается на месте. Но фокус может и не удасться, если шелчок будет недостаточно резким, т. е. если он скорее будет толчком, чем шелчком; тогда изменение скорости картона с монетой будет медленным и сила инерции окажется недостаточной для того, чтобы преодолеть трение; фокус может и не получиться еще и в том случае, если картон шероховат и сила трения между ним и монетой окажется больше силы инерции монеты.

Проявление инерции принято рассматривать, как действие инерционных сил. Силам инерции, их стихийному действию, их усмирению и рациональному использованию посвящается настоящая работа. Однако для того, чтобы сделать ее доступной широкому читателю и более полезной, необходимо ознакомить читателя с некоторыми основными понятиями и законами теоретической механики.

ДВИЖЕНИЕ И СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

Механическое действие и противодействие

Одной из форм воздействия на окружающие нас предметы является механическое воздействие путем нажатия, давления одного тела на другое. Виды механического воздействия весьма разнообразны: вытягивание, выдавливание, резание, рубка, сжимание, скручивание, поднимание и т. д.

Действие первого тела на второе означает преодоление какого-то сопротивления, оказываемого вторым телом. Действие может иметь место лишь в том случае,

когда возможно сопротивление этому действию — противодействие или реакция. Преодоление сопротивления и является предметом и целью действия. Когда мы толкаем шкаф, чтобы сдвинуть его с места, наше действие растет соответственно с возрастанием сопротивления передвижению, оказываемого трением между ножками шкафа и полом. Это сопротивление трения достигает максимального значения в момент трогания шкафа с места, и в этот же момент достигает своего максимального значения и наше действие.

Действие и противодействие двух тел равны между собой и взаимно противоположны — в этом заключается один из основных законов механики, который принято называть *третьим законом Ньютона*.

Есть ли разница между активно действующим телом и пассивно ему сопротивляющимся, какое из двух взаимодействующих тел считать действующим? Если одно из тел приближается ко второму неподвижному, инициатива взаимодействия принадлежит первому, оно и является активным, действующим. Если же оба тела движутся, сближаясь, оба они одинаково активны.

Механическая энергия и другие формы энергии. Закон сохранения энергии

Для того чтобы механическое воздействие могло произойти, по крайней мере одно тело должно обладать скрытой, но готовой проявить себя активностью. Количественное выражение, меру этой активности мы называем *механической энергией* и говорим, что данное тело обладает определенным запасом механической энергии, или является носителем этой энергии.

В процессе механического воздействия одного тела на другое механическая энергия первого тела может перейти полностью или частично ко второму телу в той же или иной форме и рассеяться в окружающей среде, чаще всего в виде тепла, как это всегда в какой-то мере и происходит.

Накапливание телом механической энергии происходит путем изменения состояния тела, а именно: либо его положения относительно центра Земли, либо его состояния покоя или движения, либо его состояния внутренней напряженности. Накапливаемая телом энергия за счет его поднятия получила название *потенциальной энергии*,

т. е. энергии в таком виде, в котором она не проявляется. Накапливаемая телом энергия за счет увеличения его скорости при переходе от покоя к движению или от одной скорости движения к другой — большей, получила название *кинетической энергии*, что означает энергия движения. Энергия, накапливаемая телом за счет его упругого деформирования, растягивания, сжимания, закручивания, после которого тело почти полностью восстанавливает свою первоначальную форму, называется *энергией упругих деформаций*, или просто *упругой энергией*. Изменение запаса одного из этих трех видов механической энергии данного тела может произойти путем перехода энергии внутри этого тела из одного вида в другой или даже в другую форму энергии и от данного тела к другому или в окружающую среду, конечно, с соблюдением закона сохранения энергии: *энергия не создается и не уничтожается, а только переходит от одного тела к другому, из одной формы в другую.*

Силы и работа сил

Как уже было сказано, любое механическое действие представляет собой преодоление какого-то сопротивления. Преодоление сопротивления всегда происходит путем перемещения тела, оказывающего сопротивление, или путем деформации этого тела, т. е. перемещения точек касания его с воздействующим на него телом. Но при одном и том же перемещении могут быть переданы от одного тела другому разные количества энергии; это говорит о том, что количество передаваемой энергии определяется не только перемещением сопротивляющегося тела или его деформацией, но еще каким-то фактором, характеризующим само сопротивление; этому фактору было присвоено название «сила». *Механической силой или просто силой называется мера сопротивления, оказываемого телом при передаче ему механической энергии.* Как будет пояснено дальше, силой называется также мера механического взаимодействия двух тел, между которыми передача энергии уже прекратилась. Саму передачу механической энергии мы представляем себе в виде работы преодоления силы сопротивления.

В зависимости от природы сопротивления получили название и силы: *сила веса тела*, преодоление которой увеличивает его запас потенциальной энергии; *упругая сила тела*, преодоление которой увеличивает его запас упругой энергии; *сила инерции тела*, преодоление которой увеличивает его запас кинетической энергии.

Но бывает и так, что деформация и разрушение тела происходят без изменения его запаса энергии, например при обработке твердых материалов давлением (прессование) и резанием (снятие стружки). Энергия в процессе обработки затрачивается на преодоление сопротивления, оказываемого внутренними силами сцепления между частицами обрабатываемого тела; работа этих сил превращается в тепло и рассеивается в окружающей среде.

Наконец, могут быть и перемещения тела, во время которых не изменяется его запас энергии. Это может произойти тогда, когда тело служит лишь передатчиком энергии, т. е. оно может быть связано с другими телами так, что вся энергия, поступающая от одних из них, передавалась другим, частично рассеиваясь в окружающей среде. При этом энергия, передаваемая другим телам, может затрачиваться на преодоление сил трения или накапливаться этими телами. Силой трения, действующей на данное тело, характеризуется сопротивление перемещению этого тела относительно других тел, с которыми оно касается, оказываемое этими телами. В этом случае вся работа, затрачиваемая на преодоление сил трения, превращается в тепло, частично накапливаемое трущимися телами и рассеивающееся в окружающей среде.

Силе сопротивления, которое оказывает тело, накапливающее получаемую энергию, соответствует движущая сила, развиваемая телом, отдающим энергию из своего запаса. Затрату энергии телом мы представляем себе в виде работы развиваемой им движущей силы. Движущей силой может быть сила веса опускающегося тела и упругая сила раскручивающейся пружины, и инерционная сила тела, теряющего свою скорость в процессе преодоления какой-либо силы сопротивления, и сила трения, которой одно тело увлекает в своем движении другое тело.

Силы в статике. Принцип возможных перемещений в статике

Понятие силы очень удобно и при изучении статического, равновесного состояния тела. Равновесное состояние тела мы себе представляем как следствие такого действия на него сил со стороны других тел, при котором кинетический эффект этих сил, т. е. их влияние на движение этого тела, отсутствует. Когда силы, действующие на данное тело, взаимно уравниваются, тело остается в покое или движется по инерции — равномерно, прямолинейно. Но действие силы измеряется ее работой, а работа силы, действующей на покоящееся тело, явно равна нулю, так как между ним и средой отсутствуют какие-либо переходы механической энергии. Вспомним, однако, что при равновесной связи между двумя телами имеет место равновесие между возможными изменениями запасов энергии обоих тел. Для оценки этого состояния мысленно сообщим покоящемуся телу одно из возможных перемещений, допускаемое его связями с другими телами и достаточно малое для того, чтобы эти связи не изменились. Подсчитав при этом сумму работ всех сил, действующих на данное тело, мы должны получить нуль, что и будет как раз отражать отсутствие изменения запаса энергии данного тела, а, следовательно, его покой или движение по инерции.

Равенство нулю суммы работ всех сил, действующих на данное тело, находящееся в покое или прямолинейном равномерном движении, при достаточно малом перемещении этого тела, допускаемом его связями с другими телами, при этом не изменяющимися, получило название принципа или начала возможных перемещений. Этот принцип, вытекающий, как мы видели, из закона сохранения энергии, может быть распространен и на движущиеся тела и системы тел, как это будет далее показано. Он является наиболее общим принципом механики.

Как же все-таки понимать силу взаимодействия двух тел в состоянии покоя? Рассмотрим этот вопрос с того момента, когда начинается касание этих тел, когда первые их точки, первые поверхностные частицы тел приходят в соприкосновение. После начала касания проис-

ходит деформация тел, более выраженная вблизи мест касания и менее выраженная вдали от этих мест. Деформация может быть частично *пластической*, т. е. такой, которая сохраняется после прекращения взаимодействия тел, и частично *упругой*, т. е. такой, после которой восстанавливаются первоначальные формы тел. И в том и в другом случае происходит переход механической энергии от одного тела к другому, превращение механической энергии в тепловую и рассеивание тепла в окружающей среде, в том числе и в самих телах. Этот переход энергии представляет собой работу преодоления сил упругой и пластической деформации тел. К моменту окончания деформации тел эти силы имеют определенные значения и сохраняют их, являясь в дальнейшем силами взаимодействия касающихся тел в их относительном покое. Деформация тел продолжается столько, сколько длится их касание, однако с определенного момента в такой ничтожно малой мере, что можно считать ее прекратившейся.

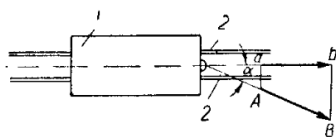
Силы взаимодействия тел. Третий закон Ньютона

Рассмотрим теперь, как вычислять работу силы. Если сила, действующая на данное тело или развиваемая данным телом, совпадает по направлению с его перемещением, работа считается равной произведению силы на величину перемещения. Причем, если сила действует в сторону перемещения, работа силы считается положительной, если же сила направлена против движения тела, ее работа считается отрицательной. Если говорить о силе, действующей на данное тело, то положительная работа равна энергии, накапливаемой телом таким путем, а отрицательная работа — энергии, утрачиваемой телом. И наоборот, если говорить о силе, развиваемой данным телом, то ее положительная работа равна энергии, утрачиваемой телом, а отрицательная — накапливаемой.

При взаимодействии двух тел работа, утрачиваемая одним телом, равна работе, накапливаемой другим телом. Так как перемещение одного из них относительно второго такое же, как перемещение второго относительно первого, и направлено в противоположную ему сторону, можем сделать вывод, что сила, действующая

со стороны первого тела на второе, равна и прямо противоположна силе, действующей со стороны второго тела на первое. В этом заключается с точки зрения сил взаимодействия двух тел третий закон Ньютона, являющийся прямым следствием закона сохранения энергии.

Значительно чаще, чем взаимодействие только двух тел, встречается взаимодействие одного тела с несколькими телами; в этом случае на данное тело действуют несколько сил. Направления сил, действующих на данное тело, могут не совпадать с направлением его перемещения. Как же направлены силы, действующие на данное тело? При касании двух твердых тел в одной точке их взаимодействие возможно лишь при отсутствии перемещения одного из них относительно другого в направлении их общей нормали, т. е. в направлении, перпендикулярном к плоскости,



Фиг. 1.

касательной поверхности этих тел в их точках касания. Действительно, если одно из них будет неподвижным, то перемещение второго в направлении общей нормали вызовет прекращение касания, а следовательно, и механического взаимодействия.

Отсюда вывод, что силы взаимодействия тел должны препятствовать их относительному перемещению в направлении их общих нормалей в точках касания и должны быть направлены по этим нормалям.

Но к твердому телу может быть приложена сила через гибкое тело; например, к тележке 1 (фиг. 1), стоящей на рельсах, может быть привязана веревка, за которую человек тянет так, что веревка направлена горизонтально под некоторым углом α к рельсам 2. Очевидно, сила направлена по веревке и не совпадает с направлением движения тележки. Таким образом, сила может быть и большей и меньшей, направленной по определенной прямой в одну или другую сторону, приложенной в той или иной точке тела. Такие величины, которые характеризуются значением, точкой приложения, линией действия и ориентацией (стороной), называют векторными величинами. Векторную величину изображают в виде отрезка прямой со стрелочкой на конце. Длина отрезка представляет численное значение этой

величины. Силы являются векторными величинами, так как действие силы определяется ее точкой приложения, линией действия, ориентацией и значением.

Проекция силы. Равновесие сил

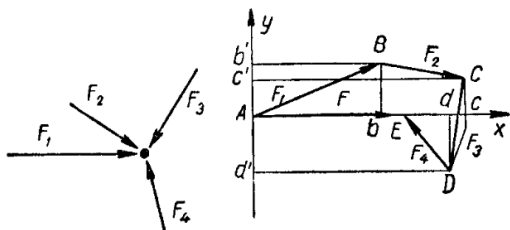
Изучение действия разных векторных величин, в том числе и сил, привело к выводу о том, что действие векторной величины в данном направлении равно действию ее проекции на это направление. Следовательно, *работа силы, действующей на тело, перемещающееся в данном направлении, равна произведению величины перемещения на проекцию силы на направление этого перемещения*. Напомним, что проекция вектора на данное направление — это вектор, началом и концом которого являются основания перпендикуляров, опущенных на это направление соответственно из начала и конца данного вектора. Так, например, на фиг. 1 вектор ab является проекцией вектора силы AB на направление перемещения тележки. Заметим, что работа силы, перпендикулярной к перемещению, равна нулю, так как ее проекция на направление перемещения в этом случае сводится к точке.

Кинетическое действие на данное тело приложенной к нему силы остается тем же, если приложить ту же силу в другой точке тела, находящейся на прямой ее действия, так как при этом не меняется проекция силы на любое направление, от которой зависит влияние силы на покой и движение тела (кинетическое действие силы). Говорят, что сила — вектор скользящий, переносимый вдоль своей линии действия. Конечно, для внутреннего состояния тела совершенно не безразлично, в какой именно точке данной прямой приложена к нему данная сила.

Если в одной точке тела приложены к нему две равные и противоположно направленные силы, их влияние на состояние покоя или движения тела явно компенсируется, взаимно гасится, — они взаимно уравновешиваются. Но так как сила — вектор скользящий, то *две равные и противоположно направленные по одной и той же прямой силы, приложенные к телу в любых двух точках этой прямой, взаимно уравновешиваются*.

Равнодействующая сил, действующих на точечную массу

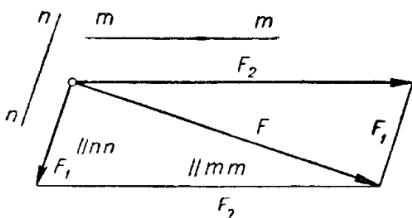
Когда на данное тело действуют несколько сил, то можно найти их *равнодействующую*, т. е. такую силу, *кинетическое действие* которой на это тело было бы таким же, как и *суммарное действие* всех приложенных к нему сил. Предположим, что тело достаточно мало для того, чтобы считать все силы приложенными к нему



Фиг. 2.

в одной и той же точке. Суммарное действие всех приложенных к данному телу сил в каком-то определенном направлении равно сумме проекций этих сил на данное направление. Следовательно, проекция равнодействующей этих сил на любое направление равна сумме проекций сил на это направление. Но проекция данного отрезка на любое направление, не параллельное ему, как известно, меньше самого отрезка; следовательно, равнодействующая будет направлена по прямой, на которую сумма проекций сил получится наибольшей. Можно рассуждать и так: находившееся в покое тело начнет перемещаться в направлении равнодействующей. Естественно, что тело начнет двигаться в том направлении, в котором суммарное действие всех приложенных к нему сил будет наибольшим, т. е. в том направлении, на котором получится наибольшая сумма проекций всех приложенных сил. Для того чтобы удобнее было получить эту сумму, лучше всего построить векторы, изображающие эти силы по величине и направлению, как это показано на фиг. 2. При этом легко убедиться, что наибольшая сумма проекций всех сил (конечно, с учетом их ориентации) получается на направлении, определяемом началом первого вектора и концом последнего. На фиг. 2 таким направлением является направление AE — ось x . Векторы Ab , bc , cd и dE являются проекциями на

направление AE векторов AB , BC , CD и DE сил F_1 , F_2 , F_3 и F_4 , а суммой этих проекций является вектор AE . Из этой же фигуры видно, что сумма векторов Ab' , $b'c'$, $c'd'$ и $d'A$ — проекций векторов тех же сил на направление y , перпендикулярное к направлению x , сводится к точке и равна нулю. Следовательно, тело начнет двигаться в направлении оси x под действием равнодействующей F , изображенной вектором AE .



Фиг. 3.

Таким образом, приходим к выводу, что *равнодействующая сил, приложенных в одной и той же точке тела, равна геометрической, векторной сумме этих сил* (выполненное на фиг. 2 построение называется *геометрическим* или *векторным суммированием*). Отсюда же вытекает возможность замены одной силы, приложенной в данной точке к данному телу, двумя или более силами, приложенными к той же точке тела, геометрическая сумма которых равнялась бы данной силе. Такую замену называют *разложением силы на составляющие*. Если идет речь о разложении силы F на две составляющие по двум заданным направлениям (фиг. 3) mm и nn , проводим из начала и конца вектора, изображающего силу F , параллельные заданным направлениям линии и получаем векторы, изображающие силы F_1 и F_2 — составляющие силы F . Такое построение называется построением с применением *правила параллелограмма*.

Инерционная сила точечной массы. Принцип Даламбера

Могут быть два случая: либо равнодействующая не равна нулю, как на фиг. 3, либо она равна нулю, что имеет место при замкнутом многоугольнике векторов сил, действующих на данное тело.

В первом случае (равнодействующая не равна нулю) равнодействующей всех внешних сил, действующих на данное тело, должна соответствовать равная ей и прямо противоположная сила сопротивления, развиваемая данным телом; полагаем, что за рассматриваемое время тело не деформируется, тогда такой силой сопротивления может быть только инерционная сила тела. *Инерционная сила является равнодействующей всех местных противодействий тела внешним силам, возникающих в местах приложения этих сил.* Следовательно, *сумма всех внешних сил, действующих на данное тело, и его инерционной силы равна нулю* — это важный вывод, к которому сводится принцип механики, известный под названием *принципа Даламбера*. Тот факт, что тело развивает инерционную силу, направленную по движению тела, говорит о том, что происходит работа преодоления силы инерции тела, а следовательно изменение его кинетической энергии, его скорости (сила инерции была введена как сила сопротивления массы изменению ее скорости).

Во втором случае (равнодействующая равна нулю) тело находится в покое или прямолинейном равномерном движении. Его скорость остается постоянной, его кинетическая энергия не меняется; следовательно, и его инерционная сила равна нулю, как и следовало ожидать, если рассматривать инерционную силу как силу противодействия всем внешним силам, равнодействующая которых равна нулю.

Единицы измерения основных механических величин

Рассуждения об энергии, силе, работе, перемещении приобретают практический смысл лишь в том случае, если эти величины измерить. А для измерения требуются, в первую очередь, единицы измерения. Одной из природных сил является сила веса — сила взаимного притяжения Земли и тел, ее окружающих. *В качестве единицы силы веса и всех других сил принята сила взаимного притяжения Земли и платино-иридиевого образца-эталоны, хранящегося в Международном бюро мер и весов близ Парижа, названная килограммом (1 кг).* И так как сила взаимного притяжения данного тела и Земли изменяется в зависимости от положения тела на

Земле, силой в один килограмм является сила притяжения эталона Землей именно в месте его хранения. В этом же музее хранится эталонный метр в виде стержня, расстояние между двумя метками которого было признано на Земле единицей измерения длины до последнего времени. С 1960 г. одним метром считается расстояние, равное $1650763,73$ длины волны излучения криптона 86. В качестве единицы измерения времени принята $1/86400$ часть средних солнечных суток, т. е. времени одного полного оборота Земли вокруг своей оси; она названа секундой (*1 сек*).

Все остальные единицы измерения механических величин выражаются через указанные три единицы измерения механических величин.

Такая система единиц измерения соответствует нашему представлению о взаимной независимости массы тел, пространства и времени и о зависимости от них всех остальных механических величин. Следует оговорить, что такое представление достаточно точно отражает действительность тогда, когда скорости движения тел обычные, несравненно меньше, чем скорость света — 300 миллионов метров в секунду. Если же скорости движения тел приближаются к скорости света, необходимо пользоваться более точным отражением действительности — теорией относительности Эйнштейна, по которой время протекания одного и того же процесса, измеренное в разных движущихся системах зависит от относительного движения этих систем, а масса тела зависит от скорости его движения.

Так как работа есть произведение силы на расстояние, в качестве единицы измерения работы служит один килограммометр (*1 кгм*), т. е. работа силы в один килограмм, действующей на данное тело при его перемещении на один метр в направлении действия силы. Но работа силы есть переход энергии; поэтому единицей измерения механической энергии также служит килограммометр. Так, например, потенциальная энергия тела весом 5 кг увеличится при его подъеме на 10 м на $5 \cdot 10 = 50 \text{ кгм}$; если для перемещения тележки необходимо приложить к ней в направлении ее движения постоянную силу 10 кг , то для ее перемещения на 50 м необходимо выполнить работу или затратить энергию $10 \cdot 50 = 500 \text{ кгм}$.

Виды механического движения тела и точки

Исследуя движение тела в пространстве, удобно рассматривать движение какой-либо определенной точки этого тела и движение тела вокруг этой точки; совокупность этих двух движений и является в общем случае движением тела в пространстве.

Точка тела во время его движения описывает линию, называемую ее траекторией. В самом общем случае траекторией точки является пространственная кривая, но она может быть и плоской кривой, когда точка движется в одной и той же плоскости; частным случаем плоской криволинейной траектории является прямолинейная — когда точка движется по прямой. Если движение тела вокруг его какой-либо определенной движущейся точки отсутствует, мы говорим, что тело совершает поступательное движение, в зависимости от траектории этой точки, — пространственное поступательное, плоское поступательное или прямолинейное поступательное движение. При этом все точки тела описывают совершенно одинаковые траектории. *Прямолинейное поступательное движение принято считать простым поступательным движением.*

Движение тела вокруг одной из его подвижных точек называется относительным вращательным движением, а сама точка — относительным центром вращения. Когда относительный центр вращения считают неподвижным*, его называют *абсолютным центром вращения* или просто *центром вращения*, а само движение — *абсолютным вращением* или просто *вращением*. При вращении точки тела движутся по сферическим поверхностям, общий центр которых находится в центре вращения. Наиболее часто встречается такое вращение, при котором сохраняется неподвижной не одна точка тела, а его прямая; эта прямая называется *осью вращения*,

* В действительности вся материя находится в постоянном движении; покой может быть лишь относительным, скажем, относительно Земли, относительно станины станка и т. д. В каждом отдельном случае можно пренебрегать движением тела, относительно которого рассматривается движение другого тела. Так, например, изучая движение автомобиля по дороге, можно считать Землю неподвижной, изучая движение обрабатываемой на станке детали и режущего инструмента, можно считать станину станка неподвижной, а при изучении работы звеньев часового механизма можно считать неподвижным корпус часов.

а вращение — *плоским вращательным движением*. При этом все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на оси вращения и плоскости которых перпендикулярны к этой оси. Вращение тела около неподвижной оси считается *простым вращательным движением*.

Окружающее нас пространство является трехмерным, т. е. положение в нем любой точки определяется тремя расстояниями этой точки до трех взаимно перпендикулярных неподвижных плоскостей. Эти расстояния названы *координатами точки*, линии пересечения плоскостей — *осями координат*, а их точка пересечения — *началом координат*.

Опыт убедил нас в том, что любое пространственное вращательное движение можно получить в результате трех простых вращений около осей координат, а любое поступательное движение — в результате трех простых поступательных движений в направлениях этих осей. Остановимся на простом поступательном и простом вращательном движениях.

Скорость и ускорение тела в поступательном прямолинейном движении

При прямолинейном поступательном движении тела все его точки описывают за один и тот же отрезок времени одинаковые отрезки пути; поэтому изучение простого поступательного движения сводится к изучению движения точки по прямой. Опыт показывает, что один и тот же отрезок пути может быть пройден точкой за больший или меньший отрезок времени, точка может двигаться быстрее или медленнее. Для оценки быстроты движения точки мы измеряем *расстояние, пройденное точкой за единицу времени*, и называем его *скоростью точки*. В механике расстояние чаще всего удобнее выражать в метрах, если за единицу времени считать одну секунду; единица измерения скорости тогда получится один метр в секунду — 1 м/сек . Некоторое время точка может двигаться по прямой с постоянной скоростью; в этом случае движение, как мы уже говорили, называется равномерным и значение скорости полностью его характеризует, если мы еще будем знать положение точки на прямой в какой-то определенный момент времени. Но

точка может двигаться и неравномерно, с переменной скоростью; движение называется *ускоренным*, если скорость возрастает, и *замедленным* — если скорость убывает. Очень важно уметь количественно оценить изменение скорости точки, так как изменение скорости тела является внешним проявлением изменения его запаса кинетической энергии. Полагая, что скорость меняется плавно, оценим ее *изменение за единицу времени* — *ускорение*. За единицу измерения ускорения принимается один метр в секунду за секунду, т. е. $1 \text{ м/сек} \cdot \text{сек} = 1 \text{ м/сек}^2$.

Скорость и касательное ускорение в криволинейном неравномерном движении

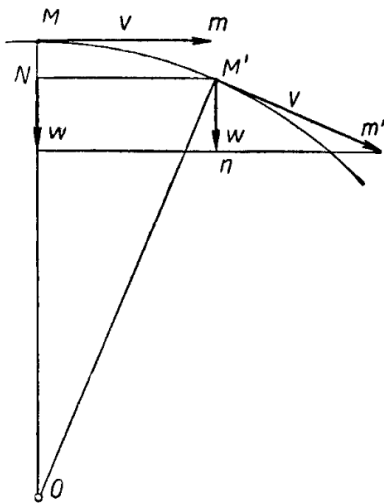
Мы знаем, что скорость точки — это путь, пройденный ею в единицу времени. Такое определение вполне понятно в случае равномерного движения точки, когда за каждую единицу времени точка проходит одинаковые расстояния. Если же точка движется ускоренно или замедленно, такое определение становится явно непригодным. Для того чтобы определить скорость точки в данный момент времени, представим себе, что тело, совершающее поступательное криволинейное движение, представляется в данный момент времени самому себе, т. е. освобождается от какого-либо воздействия на него других тел. С этого момента оно должно продолжать свое движение по инерции, т. е. любая его точка будет двигаться равномерно по прямой с той скоростью, которой она обладала в этот момент времени. Итак, скоростью точки в данный момент времени является та скорость, с которой двигалась бы эта точка равномерно прямолинейно, если тело, которому она принадлежит, продолжало бы свое движение с этого момента по инерции. Опыт убеждает нас, что прямая, по которой продолжает свое движение точка, касательна к ее криволинейной траектории в месте перехода к прямой. Следовательно, скорость точки, движущейся по кривой, касательна к этой кривой, она переменна по направлению. Таким образом, *скорость является так же, как и сила, векторной величиной*. Очевидно, что в прямолинейном движении скорость точки направлена по прямой движения. Если мы говорим об изменении скорости только по ве-

личине, это означает, что мы говорим об ускорении в прямолинейном неравномерном поступательном движении тела. Естественно, что ускорение, как изменение лишь значения скорости, направлено также по прямой движения, а именно: ускорение — по направлению скорости, а замедление — в противоположную сторону. Если же меняется значение скорости точки, движущейся по кривой, то этому соответствует *ускорение, направленное по касательной к траектории и названное поэтому касательным* (тангенциальным) *ускорением*.

Центростремительное ускорение

Посмотрим теперь, с каким ускорением связано изменение скорости по направлению.

На фиг. 4 изображена дуга MM' , пройденная точкой за единицу времени, достаточно малого для того, чтобы эту дугу можно было принять за дугу окружности с центром в точке O и радиусом $OM = OM' = r$, называемым радиусом кривизны траектории. Так как скорость касательна к траектории, скорость точки в положении M перпендикулярна к OM , а в положении M' — к OM' эти скорости изображены векторами v . Замечаем, что проекция вектора скорости в точке M на направление OM равна нулю, а проекция вектора скорости в M' на это же направление равна вектору w . Следовательно, постоянная по значению скорость точки изменилась за единицу времени в направлении OM на величину w , которая, таким образом, является ускорением точки в направлении OM . Как видно из рисунка, это *ускорение направлено к центру кривизны траектории, поэтому оно называется центростремительным*, а так как оно направлено



Фиг. 4.

перпендикулярно касательной к траектории, оно еще называется *нормальным* и обозначается W^n . Треугольники $M'n'm'$ и $M'NO$ подобны как прямоугольные и имеющие, равные острые углы в вершинах m' и O ; следовательно, $\frac{M'n}{M'm'} = \frac{M'N}{OM'}$ или $\frac{\omega^n}{v} = \frac{M'N}{r}$. При достаточно малой единице времени отрезок NM' будет ничтожно мало отличаться от дуги MM' , равной скорости v ; принимая $M'N = v$, получаем $\frac{\omega^n}{v} = \frac{v}{r}$, откуда $\omega^n = \frac{v^2}{r}$; эта формула связывает нормальное центростремительное ускорение ω^n точки с ее скоростью v и радиусом кривизны r траектории. Заметим, что при прямолинейном движении $\omega^n = 0$, так как радиус кривизны прямой бесконечен, и, разделив конечную величину (v^2) на бесконечность, получаем нуль.

Инерционная сила и равнодействующая в поступательном прямолинейном движении

Если ускорение движения точки постоянно, т. е. *если скорость возрастает или убывает на одну и ту же величину за каждую последующую секунду, движение называется равноускоренным или равнозамедленным*. Очевидно, что при таком движении изменение кинетической энергии возрастает или убывает также на одну и ту же величину за каждую последующую секунду; например, если за третью секунду движения кинетическая энергия увеличилась на 2 кГм, за четвертую на 5 кГм, то за пятую она увеличится на 8 кГм, а за шестую на 11 кГм и т. д. Но при равноускоренном или равнозамедленном движении путь, пройденный телом за каждую секунду (скорость), больше пути, пройденного за предыдущую секунду на одну и ту же величину — ускорение. Получается, что изменение кинетической энергии тела, а следовательно, и работа его инерционной силы пропорциональны его перемещению. Но инерционной силе сопротивления данного тела соответствует равная и прямо противоположная ей равнодействующая всех сил, действующих на данное тело (если пренебречь сопротивлением деформации тела).

* Буквенные индексы, стоящие справа сверху, не следует рассматривать здесь и в дальнейшем как показатели степеней.

Так как работа равна произведению силы на путь, пропорциональность работы перемещению может иметь место только при постоянстве силы. Так, например, работа силы в 10 кГ , действующей на данное тело в направлении его прямолинейного перемещения, при перемещении тела на 20 м равна $10 \cdot 20 = 200 \text{ кГм}$. Если работа увеличилась втрое ($200 \cdot 3 = 600 \text{ кГм}$) и перемещение увеличилось втрое ($20 \cdot 3 = 60 \text{ м}$), то, очевидно, величина силы осталась такой же: $600 : 60 = 10 \text{ кГ}$.

Отсюда вывод: *в равноускоренном или равнозамедленном движении тела его инерционная сила и равнодействующая всех сил, на него действующих, — постоянны.* Таким образом, постоянному ускорению тела соответствует постоянная сила инерции тела и постоянная равнодействующая всех действующих на него сил.

Сила и масса; масса инерционная и масса тяготения. Закон всемирного тяготения. Второй закон Ньютона

Связь между равнодействующей всех внешних сил, действующих на данное тело, и инерционной силой, развиваемой телом, с одной стороны, и его ускорением, с другой стороны, заключается не только в таком соответствии, как было указано выше. Опытom установлено, что равнодействующая и инерционная силы пропорциональны ускорению данного тела; *константа (постоянная) пропорциональности данного тела названа его массой, инертной массой.* Если равнодействующую обозначить $F \text{ кГ}$, силу инерции $P \text{ кГ}$, ускорение $a \text{ м/сек}^2$, а массу тела m , то $F = P = ma$. *Единицей измерения массы соответственно является масса, получающая ускорение в 1 м/сек^2 под действием силы в 1 кГ и развивающая при этом инерционную силу в 1 кГ , т. е. масса в $1 \text{ кГ/м/сек}^2 = 1 \text{ кГсек}^2/\text{м}$.*

Сила веса данного тела, действующая на него со стороны Земли, также равна массе тела, умноженной на ускорение свободного падения тела, т. е. такого движения тела, при котором на него действует только сила земного притяжения. Ускорение свободного падения еще называют ускорением земного притяжения и обозначают g ; в разных точках земного шара g разное, приблизительно равно $9,81 \text{ м/сек}^2$.

Законом всемирного тяготения установлено, что сила взаимного притяжения двух сферических тел пропор-

циональна произведению констант этих двух тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между их центрами. Эти константы также названы массами, только *массами тяготения*. Какая же связь между инертной массой и массой тяготения? Сила веса G , действующая на инертную массу m , равна mg ; эта же сила G как сила взаимного притяжения массы тяготения Земли M' и массы тяготения тела m' равна $\frac{fM'm'}{r^2}$, где r — расстояние между центром Земли и телом, а f — коэффициент пропорциональности. Следовательно: $mg = \frac{fM'm'}{r^2}$, откуда $m = \frac{fM'm'}{gr^2}$. Опыт убеждает нас в том, что ускорение свободного падения одинаково в данной точке Земли для любого тела; следовательно, выражение $\frac{fM'}{gr^2} = k$ является постоянной величиной в данной точке поверхности Земли.

Получается, что масса инертная m и масса тяготения m' данного тела пропорциональны: $m = km'$. Для того чтобы инертная масса тела и его масса тяготения выражались одним и тем же числом, необходимо лишь подобрать соответственно единицу измерения массы тяготения*. Равенство $F = P = ma$ является выражением *второго закона Ньютона*.

Инерционная сила и равнодействующая в поступательном криволинейном движении

Итак, тело, совершающее поступательное криволинейное неравномерное движение, обладает касательным и центростремительным ускорениями. В соответствии с этим удобно считать, что равнодействующая всех сил, действующих на такое тело, состоит из двух составляющих: одной касательной, направленной по касательному ускорению и равной произведению этого ускорения на

* Для того чтобы m и m' данного тела выражались одним и тем же числом, надо чтобы $k=1$; а для того чтобы и их размерности были одинаковыми, k должно быть безразмерным коэффициентом, безразмерной единицей. Для выполнения этого условия, постоянная тяготения f должна иметь размерность L^4/t^4F , чему соответствует единица измерения $1 \text{ м}^4/\text{сек}^4 \text{ кг}$. Измеряя f опытным путем, получим приблизительно $f=6,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/\text{сек}^4 \text{ кг}$.

массу тела, и другой — центростремительной, направленной по центростремительному ускорению и равной его произведению на массу тела. Этим двум составляющим равнодействующей противодействуют две составляющие инерционной силы, развиваемой телом: *касательная сила инерции, равная произведению массы тела на касательное ускорение и противоположно ему направленная, и центробежная сила инерции, равная произведению массы тела на центростремительное ускорение и противоположно ему направленная*. Следует отметить, что *массу тела удобнее всего определять как отношение его веса к ускорению свободного падения в месте взвешивания его на Земле*.

Таким образом, представление о силе инерции как о силе сопротивления тела изменению его скорости по величине остается правильным и для случая изменения его скорости по направлению. Принципиальное отличие между касательной и центробежной силами инерции заключается в том, что работа касательной силы инерции представляет собой изменение его запаса кинетической энергии, в то время, как работа центробежной силы инерции равна нулю, так как ее направление перпендикулярно к перемещению (скорости) тела.

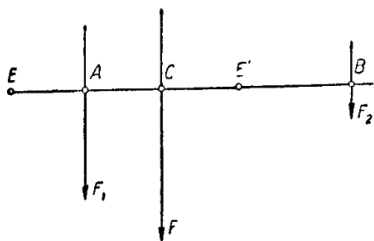
Если размеры тела столь малы, что можно считать все силы приложенными к нему в одной точке, очевидно, что линия действия равнодействующей и инерционной силы проходит через эту же точку — случай, рассмотренный выше. О вращении такого тела речи быть не может, так как тело сводится к одной материальной точке или, как говорят, точечной массе. Если же размеры тела значительны, мы представляем его себе состоящим из множества частиц (крупниц, зерен), размерами каждой из которых в отдельности можно пренебречь, а силу инерции такого тела рассматриваем как равнодействующую инерционных сил всех этих частиц. Каждая из инерционных сил проходит через точку расположения частицы, ее развивающей.

Параллельные силы и момент силы

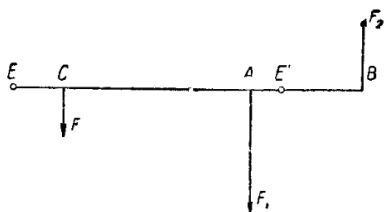
В поступательном движении тела все его точки обладают одинаковыми по величине и направлению ускорениями; следовательно, инерционные силы частиц поступательно движущегося тела параллельны между собой,

направлены в одну и ту же сторону и пропорциональны массам этих частиц.

Как известно, равнодействующая F двух параллельных сил F_1 и F_2 (фиг. 5) равна их сумме, а ее линия действия делит расстояние между ними на два отрезка, обратно пропорциональных этим силам: $\frac{CB}{CA} = \frac{F_1}{F_2}$.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Равнодействующая F (фиг. 6) двух антипараллельных, т. е. параллельных, но направленных в противоположные стороны, сил F_1 и F_2 равна их разности ($F = F_1 - F_2$, если F_1 больше F_2), а ее линия действия проходит вне расстояния между силами со стороны большей силы, причем расстояния от равнодействующей до сил обратно пропорциональны: $\frac{CB}{CA} = \frac{F_1}{F_2}$ или $F_1 AC = F_2 BC$.

Если мы возьмем какую-либо точку E на прямой AB (фиг. 5) и просуммируем произведения сил F_1 и F_2 на расстояния от них до этой точки $F_1 AE + F_2 BE = F_1 (CE - AC) + F_2 (BC + CE) = (F_1 + F_2) CE - F_1 AC + F_2 BC$, то убедимся в равенстве этой суммы произведению равнодействующей F на расстояние CE от равнодействующей до этой же точки $F \cdot CE$, так как $F_1 + F_2 = F$, а $F_1 AC = F_2 BC$. Если точку взять между A и B (E'), то мы получим тот же результат в том случае, если расстояния от сил до точки E , находящиеся по одну сторону от нее, будут иметь один знак, а расстояния, находящиеся по другую сторону, — противоположный знак. Рассматривая эти произведения относительно точек E и E' на фиг. 5, мы убедимся, что знак произведения силы на расстояние от нее до точки зависит не только от расположения силы относительно точки, но и от ориентации самой силы. Таким образом, знаки произведений определяются тем,

в какую сторону стремятся силы повернуть тело вокруг той точки, до которой берутся расстояния от сил. Эти расстояния называются *плечами сил*, а произведения — *моментами сил*.

Момент силы является также векторной величиной, так как он имеет значение и направление (по движению часовой стрелки или против нее). *Единицей измерения момента служит один килограмметр (1 кгм) — момент силы в 1 кг — относительно точки, находящейся на расстоянии 1 м от линии действия силы.*

Если на тело действуют не две, а несколько параллельных сил, причем все они расположены в одной плоскости и направлены в разные стороны, то их равнодействующую можно получить, находя первую равнодействующую первой и второй из них, потом вторую равнодействующую первой равнодействующей и третьей силы и т. д. Очевидно, что проще принять все силы, направленные в одну сторону, положительными, в противоположную — отрицательными и определять равнодействующую их алгебраическим суммированием. Затем, считая моменты сил относительно данной точки в их плоскости положительными, если эти силы стремятся повернуть тело вокруг данной точки в одну сторону, и отрицательными, если силы стремятся повернуть тело в противоположную сторону, найдем момент равнодействующей относительно данной точки, суммируя алгебраически моменты всех сил относительно этой точки. Полученные знаки равнодействующей и момента укажут нам их направления.

Равенство момента равнодействующей системы параллельных сил относительно точки в плоскости этих сил алгебраической сумме их моментов относительно этой точки — теорема большого практического значения, справедливая и для сил параллельных, находящихся в разных плоскостях, и для любого расположения сил, и не только относительно точки, но и относительно прямой, т. е. когда расстояния (плечи сил) берутся до определенной прямой — оси. Отсюда вытекает следствие не меньшего практического значения: сумма моментов сил относительно точки, находящейся на линии действия их равнодействующей, или относительно оси, пересекающей эту линию, равна нулю, так как и момент равнодействующей относительно такой точки или оси равен, как и ее плечо, нулю.

Важно отметить, что если параллельные силы, сохраняя свои значения и точки приложения, меняют направления на один и тот же угол, оставаясь параллельными между собой, меняется и линия действия их равнодействующей, но так, что она будет проходить через одну и ту же точку, называемую центром параллельных сил; это легко доказывается чисто геометрически.

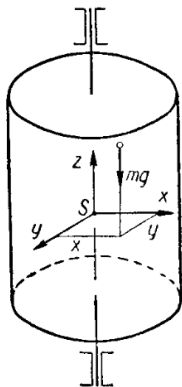
Возвращаясь к двум антипараллельным силам, рассмотрим один частный, но имеющий большое значение случай, когда эти две силы равны между собой. Несмотря на то, что их алгебраическая сумма равна нулю, в таком случае, они взаимно не уравниваются и, будучи приложенными к телу, стремятся вызвать вращение его около оси, перпендикулярной к плоскости этих сил. Такое сочетание двух антипараллельных сил называется *парой сил*. Момент пары сил — произведение одной из них на расстояние между ними — равен сумме моментов этих сил относительно любой оси, перпендикулярной к их плоскости, или же, что то же самое, относительно любой точки в плоскости этих сил. Действительно, сумма моментов сил F_1 и F_2 (фиг. 6) относительно точки E равна $F_2 \cdot BE - F_1 \cdot AE = F_2 (AB + AE) - F_1 \cdot AE = F_2 AB + F_2 AE - F_1 AE$; при $F_1 = F_2$ эта сумма равна $F_2 AB$.

Сила веса и центр тяжести тела. Инерционная сила и равнодействующая внешних сил в поступательном движении

С параллельными силами мы встречаемся в случае действия на тело притяжения Земли, если считать силы веса частиц данного тела, направленные к центру Земли, параллельными между собой; такое допущение оправдано несоизмеримой малостью размеров обычно рассматриваемых тел по сравнению с их расстояниями до центра Земли. По этой же причине расстояния от точек данного тела до центра Земли неощутимо мало отличаются между собой, и можно считать, что силы веса частиц тела пропорциональны массам этих частиц. Итак, силу веса тела можно считать равнодействующей параллельных между собой сил, пропорциональных массам частиц и приложенных к телу в местах расположения этих частиц. С поворотом тела относительно Земли меняется положение в теле линии действия его силы веса,

но в соответствии со сказанным выше о центре параллельных сил все линии действия силы веса данного тела проходят через одну, определенную точку его, называемую *центром тяжести* или *центром масс тела*.

Если в данном теле мысленно разместить систему осей координат с началом в его центре тяжести — три взаимно перпендикулярные прямые Sz , Sx и Sy , пересекающиеся в центре тяжести S тела (фиг. 7), то, в соответствии со сказанным выше, суммы моментов сил веса частиц тела относительно этих осей равны нулю. Выбираем ось Sz вертикальной; тогда силы веса mg частиц окажутся ей параллельными. Расстояние от каждой из этих сил веса до оси Sx равно расстоянию от частицы до этой оси, которое называется координатой y частицы; аналогично плечо каждой из этих сил относительно оси Sy равно расстоянию от частицы до оси y и называется ее координатой x . Таким образом, суммы моментов равны $\Sigma mgy = 0$ и $\Sigma mgx = 0$, (знак Σ означает алгебраическую сумму выражений). Но g является общим множителем членов каждой из этих сумм, следовательно, $\Sigma my = 0$ и $\Sigma mx = 0$.



Фиг. 7.

Когда речь шла об инерционной силе тела в поступательном движении, мы сталкивались с параллельными между собой силами инерции частиц тела, также пропорциональными массам этих частиц; следовательно, линия действия силы инерции тела в поступательном движении также проходит через его центр тяжести. Очевидно, равная ей равнодействующая всех сил, действующих на тело в поступательном движении, также проходит через его центр тяжести.

Вращательное движение тела

Перейдем к рассмотрению вращательного движения тела, где встретимся с парами сил и их моментами. Начнем с простого вращения тела около его неподвижной прямой — оси вращения. Зная начальное положение тела в какой-либо определенный момент времени, его положение через некоторый отрезок времени можно

определить углом φ поворота тела относительно начального положения. Угол φ измеряется в радианах; угол в один радиан — это центральный угол, которому соответствует дуга окружности, равная ее радиусу (угол в 360° , которому соответствует вся окружность, содержащая 2π радиусов, имеет 2π радиан, а угол в α° имеет $\frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180}$ радиан).

Изменение угла φ за единицу времени называется угловой скоростью, обозначается ω и измеряется в радианах в секунду (рад/сек).

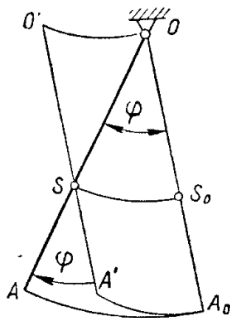
Так же, как и поступательное движение, вращательное может происходить с постоянной угловой скоростью (равномерное вращение) и с переменной угловой скоростью (ускоренное или замедленное вращение). Для оценки быстроты, резкости изменения скорости вводится понятие углового ускорения — изменения угловой скорости за единицу времени. Угловое ускорение обозначается ε и измеряется в радианах в секунду за секунду (рад/сек²). Если равномерно вращающееся тело (с постоянной угловой скоростью) совершает n оборотов в минуту, то его угловая скорость ω может быть выражена через n : за одну секунду оно совершит $\frac{n}{60}$ оборотов; но один оборот соответствует повороту этого тела на угол 2π радиан, следовательно, угол, на который повернется тело за 1 сек (т. е. его угловая скорость ω), равен $2\pi \frac{n}{60}$ рад или $\omega = \frac{\pi n}{30}$ рад/сек.

Если окружность, описываемая какой-либо из точек вращающегося тела, имеет радиус r (фиг. 8), т. е. отстоит на r от оси вращения, пройденный ею путь s связан с углом φ поворота тела зависимостью $\varphi = \frac{s}{r}$, вытекающей из самого определения радиана, откуда $s = r\varphi$. Аналогичные зависимости имеют место и для угловой скорости и углового ускорения: $\omega = \frac{v}{r}$ и $\varepsilon = \frac{\omega^t}{r}$ (ω^t — касательное ускорение точки), откуда $v = r\omega$ и $\omega^t = r\varepsilon$. Кроме касательного ускорения точки вращающегося тела, как мы уже видели, есть еще центростремительное ускорение $\omega^n = \frac{v^2}{r}$, или $\omega^n = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$. В соответствии с этим каждая точечная частица (точечная масса) вращающегося

тела развивает две инерционные силы: одну — касательную $p^t = m\omega^t$ и другую — центробежную $p^n = m\omega^n$ (m — масса частицы). Представим себе, что данное тело совершает переход из положения OA_0 (фиг. 9) в положение OA при вращении около неподвижной оси O в два приема: тело, двигаясь поступательно со скоростью и ускорением его центра тяжести S , переходит из положения OA_0 в положение $O'A'$ и затем, вращаясь около



Фиг. 8.



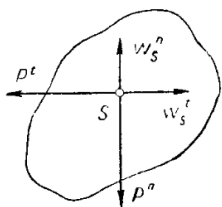
Фиг. 9.

оси, проходящей через центр тяжести S , параллельной фактической оси вращения, переходит из положения $O'A'$ в положение OA . Как видно из фиг. 9, тело должно повернуться около оси S за то же время на тот же угол φ , что и вокруг оси O . Таким образом, вращение тела около данной оси можно рассматривать как состоящее из поступательного движения с фактическими скоростью и ускорением центра тяжести и вращательного движения около оси, параллельной данной и проходящей через центр тяжести с фактическими угловой скоростью и угловым ускорением тела.

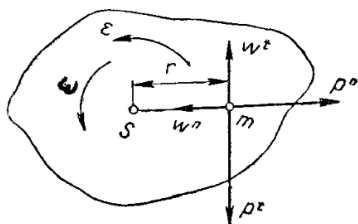
Сила инерции вращающегося тела

Силу инерции будем определять как состоящую из инерционных сил точечных частиц в поступательном движении и инерционных сил этих частиц во вращательном движении около центральной оси, параллельной фактической оси вращения (центральной называется ось, проходящая через центр тяжести).

В поступательном движении инерционные силы точечных частиц тела сводятся, как мы уже видели, к двум равнодействующим, проходящим через центр тяжести тела, одной — касательной P^t , равной произведению массы тела $\left(\frac{G}{g}\right)$ на касательное ускорение $\omega_s^t = \varepsilon s$ его центра тяжести (s — расстояние OS центра тяжести S от фактической оси вращения), и другой — центробежной P^n , равной произведению массы $\frac{G}{g}$ на центростремительное ускорение $\omega_s^n = \omega^2 s$ центра тяжести тела (фиг. 10).



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Во вращательном движении около центральной оси (фиг. 11) S с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε одна из точечных частиц массы m , находящаяся на расстоянии r от центральной оси S , обладающая в этом движении центростремительным ускорением $\omega^n = r\omega^2$ и касательным ускорением $\omega^t = r\varepsilon$, развивает две инерционные силы: центробежную $p^n = mr\omega^2$ и касательную $p^t = mr\varepsilon$. Найдем равнодействующую сил p^n . С этой целью представим себе плоскость Π , перпендикулярную в S к оси вращения тела, и в этой плоскости оси координат Sx и Sy ; осью Sz явится ось вращения (фиг. 12). Положение любой точки тела вполне определяется тремя расстояниями от нее до плоскостей осей координат x , y и z . Силу p^n перенесем вдоль ее радиуса r и разложим на две составляющие: p_x^n и p_y^n в плоскости, параллельной xy . Из явного подobia треугольников сил и треугольников Sam и Sbm следует, что

$$\frac{p_x^n}{Ca} = \frac{p_y^n}{Cb} = \frac{p^n}{Cm}$$

или

$$\frac{p_x^n}{x} = \frac{p_y^n}{y} = \frac{mr\omega^2}{r},$$

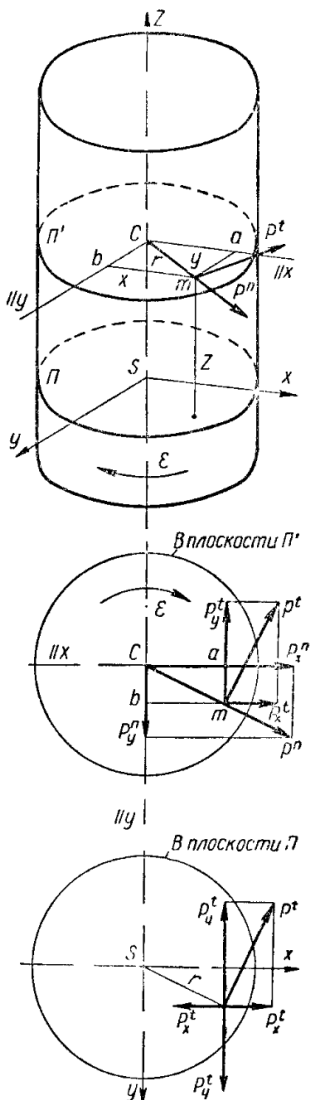
откуда

$$p_x^n = mx\omega^2 \text{ и } p_y^n = my\omega^2.$$

Силы p_n^x параллельны между собой и направлены в разные стороны. Силы p_n^y также параллельны между собой и направлены в разные стороны. Величина равнодействующей параллельных сил получится алгебраическим их суммированием; значение равнодействующей сил p_x^n будет

$$\begin{aligned} p_x^n &= m_1x_1\omega^2 + m_2x_2\omega^2 + \dots \\ &= \omega^2 (m_1x_1 + m_2x_2 + \dots) = \\ &= \omega^2 \Sigma mx. \end{aligned}$$

Аналогично равнодействующая всех сил p_y^n будет $p_y^n = \omega^2 \Sigma my$. Но так как ось z проходит через центр тяжести тела, суммы Σmx и Σmy равны нулю, как это было выше показано. Так что равнодействующая равна нулю. Но силы p_x^n параллельны и направлены в противоположные стороны, они могут свестись к паре сил; для того чтобы найти момент M_y^n (индекс y означает, что момент получается относительно оси y) равнодействующей пары всех сил p_x^n , необходимо просуммировать алгебраически моменты всех сил p_x^n относительно какой-либо точки или оси. Сделаем это относительно



Фиг. 12.

точки S . Заметим, что плечо силы p_x^n массы m относительно точки S равно координате z этой массы; следовательно,

$$M_y^n = p_{x_1}^n z_1 + p_{x_2}^n z_2 + \dots = m_1 x_1 \omega^2 z_1 + m_2 x_2 \omega^2 z_2 + \dots = \\ = \omega^2 (m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + \dots); \\ M_y^n = \omega^2 \Sigma m x z.$$

Аналогично получаем значение момента M_x^n (момент относительно оси x) равнодействующей пары всех сил p_y^n :

$$M_x^n = \omega^2 \Sigma m y z.$$

Суммы $\Sigma m x z$ и $\Sigma m y z$ называются центробежными моментами инерции тела и обозначаются J_{xz} и J_{yz} . Центробежные моменты инерции зависят от распределения массы тела в его объеме относительно выбранных осей координат. Суммы $\Sigma m x z$ и $\Sigma m y z$ алгебраические и могут быть равными нулю. Если они равны нулю, значит центробежные силы инерции тела полностью взаимно уравновешиваются; при этом ось z называется главной центральной осью инерции тела.

Посмотрим теперь, к чему сводятся касательные инерционные силы p^t . Каждую из сил p^t раскладываем на две составляющие $p_x^t = m y \varepsilon$ и $p_y^t = m x \varepsilon$, аналогично тому, как это было сделано для сил p^n . Затем вводим в плоскости xy (Π) четыре взаимно уравновешивающиеся силы; две противоположно направленные друг к другу, равные p_x^t и находящиеся с ней в одной плоскости, параллельной оси z , и другие две противоположно направленные друг другу, равные p_y^t и находящиеся в одной с ней плоскости, параллельной оси z . Таким образом, сила p_y^t оказывается замененной равнодействующей ей системой, состоящей из пары сил p_x^t с моментом $p_x^t z$ и силы p_x^t — в плоскости xy . Аналогично сила p_x^t оказывается замененной равнодействующей ей системой, состоящей из пары сил с моментом $p_y^t z$ и силы p_y^t в плоскости xy . Суммируя все моменты $p_x^t z$ и $p_y^t z$, получаем $\Sigma m y \varepsilon z = \varepsilon \Sigma m y z = J_{yz}$ и $\Sigma m x \varepsilon z = \varepsilon J_{xz}$. В плоскости xy силы p_x^t образуют систему параллельных сил, направленных в противоположные стороны, их сумма $\Sigma p_x^t = \Sigma m y \varepsilon = \varepsilon \Sigma m y = 0$, так

как $\Sigma t y = 0$. Сумма сил p_y^t в плоскости xy по той же причине равна нулю ($\Sigma p_y^t = \epsilon \Sigma t x = 0$). Таким образом, равнодействующей всех сил p_x^t и p_y^t , или, что то же самое, всех сил p^t в плоскости xy , может быть лишь пара сил, момент которой получится суммированием моментов этих сил относительно какой-либо точки плоскости xy , скажем точки S : $\Sigma p^t r = \Sigma t r \epsilon r = \epsilon \Sigma t r^2$. Выражение $\Sigma t r^2$ — сумма произведений масс точечных частиц данного тела на квадраты расстояний от этих частиц до определенной оси (в данном случае — оси z) называется моментом инерции тела относительно этой оси и обозначается J с индексом, указывающим ось (в данном случае J_z). Как видно, это значение зависит от распределения массы внутри тела относительно оси. Единицей измерения моментов инерции тел служит $1 \text{ кгсек}^2/\text{м} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ кгмсек}^2$ — один килограммометрсекунда в квадрате.

Приходим, таким образом, к выводу, что тело, совершающее вращательное движение около данной оси O с угловой скоростью ω , угловым ускорением ϵ и обладающее весом G , моментом инерции J_z относительно его центральной оси, проходящей через центр тяжести S параллельно оси вращения на расстоянии s от нее, и центробежными моментами инерции J_{xz} и J_{yz} , развивает инерционные силы, которые сводятся к следующим силам и парам сил:

1) к центробежной силе инерции $P^n = \frac{G}{g} s \omega^2$, проходящей через S в сторону от O к S ;

2) к касательной силе инерции $P^t = \frac{G}{g} s \epsilon$, проходящей через S перпендикулярно к OS в сторону, противоположную ϵ ;

3) к паре сил инерции с инерционным моментом $M_z^u = J_z \epsilon$, действующей вокруг оси z , противоположно ϵ ;

4) к паре сил инерции с инерционным моментом вокруг оси y :

$$M_y^u = \omega^2 J_{xz} + \epsilon J_{yz};$$

5) к паре сил инерции с инерционным моментом вокруг оси x :

$$M_x^u = -\omega^2 J_{yz} + \epsilon J_{xz}.$$

Знаки последних двух моментов будут указывать их направление: положительное направление момента считается то, которому соответствует пара сил, стремящаяся повернуть тело около оси y от положительной полуоси z к положительной полуоси x , около оси x — от положительной полуоси y к положительной полуоси z . В соответствии с этим считается ϵ положительным, если ускоряется вращение около оси z в сторону от положительной полуоси x к положительной полуоси y . Таким образом, знаки последних двух моментов зависят от знаков и абсолютных значений центробежных моментов инерции тела и его углового ускорения.

Итак, если центр тяжести тела находится на его оси вращения, центробежные силы инерции либо сводятся к двум парам сил с моментами $\omega^2 J_{xz}$ и $\omega^2 J_{yz}$, либо полностью взаимно уравновешиваются. В первом случае мы говорим, что вращающееся тело статически уравновешено или статически отбалансировано; во втором — что оно уравновешено или отбалансировано полностью. *Условие нахождения центра тяжести ротора* (роторами называются все вращающиеся части машин и механизмов) на его оси вращения называют *условием статической уравновешенности ротора*, а равенство нулю его центробежных моментов инерции — *условием его динамической уравновешенности*; совокупность же этих условий — *условием полной уравновешенности ротора*. В дальнейшем мы увидим, каков смысл названий этих условий и практическое их значение.

Внешние силы, действующие на вращающееся тело

Работе инерционных сил тела соответствует равная и противоположная по знаку работа равнодействующей внешних сил, действующих на данное тело. Если работу внешних сил, приложенных к данному телу, за некоторый отрезок времени обозначить A , а значения кинетической энергии тела в начале и конце этого отрезка времени обозначить E' и E'' и если потенциальная и упругая энергия тела за это время не изменялась, очевидно, что $E'' - E' = A$. Силам инерции соответствуют внешние силы. Если тело совершает вращательное движение около неподвижной оси, то соответственно

развиваемым им силам инерции внешние силы, действующие на него, сводятся к следующим силам и парам сил:

1) к центростремительной силе F^n , равной и противоположной центробежной силе инерции P^n , вызывающей изменение направления движения центра тяжести тела;

2) к касательной силе F^t , равной и противоположной касательной силе инерции P^t , вызывающей изменение величины скорости центра тяжести тела;

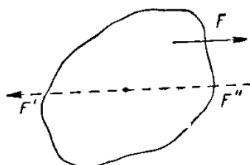
3) к паре сил с моментом M_z , равным и противоположным инерционному моменту M_z^u , вызывающей изменение величины угловой скорости тела;

4) к паре сил с моментом M_y , равным и противоположным инерционному моменту M_y^u ,

5) к паре сил с моментом M_x , равным и противоположным инерционному моменту M_x^u .

Работа силы F^t и пары сил с моментом M_z переходит в кинетическую энергию тела; работа остальных сил и пар равна нулю (если пренебречь деформацией тела — изменением его упругой энергии); эти силы и пары удерживают неподвижной ось вращения тела, они действуют на вращающееся тело со стороны опор-подшипников. Итак, для того чтобы тело вывести из состояния покоя и заставить его вращаться вокруг неподвижной оси, необходимо увеличить его угловую скорость от нуля до какого-то значения и создать угловое ускорение тела ε , следовательно, необходимо приложить к нему пару сил с моментом $M_z = J_z \varepsilon$. Чем больше момент инерции тела относительно его оси вращения, тем большим должен быть момент прикладываемой пары сил для определенного увеличения угловой скорости за определенный отрезок времени. Это же выражение говорит о том, что для поддержания равноускоренного (с постоянным угловым ускорением) вращения тела, необходимо приложить к нему пару сил с постоянным моментом относительно оси вращения. Однако нам известно из опыта, что тело можно заставить вращаться около неподвижной оси, приложив к нему только одну силу; все же к нему оказывается приложенной не одна сила, а пара сил; вторая сила, равная, параллельная и противоположно направленная приложен-

ной нами силе, действует на тело со стороны опор, поддерживающих неподвижной его ось вращения. Толкая за ручку створку дверей, висящую на петлях, мы прикладываем к ней силу, а со стороны петель к ней прикладывается равная и антипараллельная сила; получается пара сил, которая вызывает угловое ускорение створки, т. е. ее переход из состояния покоя к вращению с некоторой угловой скоростью около неподвижной оси петель.



Фиг. 13.

напрашиваются два вывода:

1) если к покоящемуся телу приложена только пара сил или если все приложенные к нему силы сводятся к одной паре сил, центр тяжести тела остается неподвижным и, следовательно, единственным возможным движением является вращение тела около центральной оси — оси, проходящей через центр тяжести;

2) если равнодействующая всех приложенных к покоящемуся телу сил не проходит через его центр тяжести, тело не будет совершать чисто поступательного движения. И для того чтобы выяснить, какое именно ускорение приобретает тело под действием внецентренного приложения силы к нему, удобно ввести две противоположно направленные через центр тяжести силы, равные фактически приложенной силе.

На фиг. 13 фактически приложенная сила обозначена F , а введенные две силы F' и F'' . Силы F' и F'' взаимно уравновешиваются и никак не могут повлиять на покой и движение тела. Но они помогают нам увидеть то, что происходит, чему равноценно действие одной внецентренно приложенной силы: силы F и F' образуют пару сил, вызывающую угловое ускорение около центральной оси, перпендикулярной к плоскости этой пары сил; сила F'' вызывает поступательное ускорение тела. Оба вывода говорят об особой роли центральной оси тела.

Главные центральные оси инерции тела

Тело имеет бесконечное множество центральных осей, из них надо отметить три взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежные моменты инерции тела равны нулю и которые, как уже было сказано, называются *главными центральными осями* тела и являются свободными осями вращения. Это означает, что если тело вращать около одной из этих трех осей, можно ось ничем не удерживать, можно убрать опоры вращения (подшипники) и тело будет продолжать вращаться около неподвижной в пространстве оси. Если освободить, раскрепить ось вращения тела, которая не была его главной центральной осью, тело стремится изменить свою ось вращения и начинает вращаться около одной из своих трех главных центральных осей. *В том, что главные центральные оси тела стремятся к состоянию неподвижности или равномерно поступательного прямолинейного движения (в случае сложного движения свободного тела), проявляется основное свойство массы — ее инерция.* Поэтому эти оси еще называются *осями инерции* тела, а центр тяжести, через который они проходят — *центром инерции* тела. *Закон инерции* можно сформулировать так: *массе свойственно поступательное прямолинейное равномерное движение и вращательное равномерное движение около одной из ее главных центральных осей инерции.*

Можно доказать математически, что имеются два крайних значения центральных моментов инерции данного тела: одно — наименьшее, относительно одной из его главных центральных осей инерции, другое — наибольшее, относительно другой главной центральной оси инерции. Интересно отметить, что вращение свободного тела устойчиво вокруг именно этих двух осей инерции, т. е. случайные толчки не нарушают вращение тела около этих осей; вокруг же третьей оси инерции, относительно которой момент инерции тела имеет какое-то промежуточное значение, вращение неустойчиво. Конечно, могут быть и тела, у которых моменты инерции относительно двух главных центральных осей инерции одинаковы; например, у однородного цилиндра относительно осей x и y при оси z , совпадающей с его геометрической осью; у однородного шара любая центральная ось

является главной, его моменты инерции относительно любой оси, проходящей через его геометрический центр, равны между собой.

Кинетическая энергия тела

Как было уже указано, работа инерционных сил тела представляет собой изменение запаса его кинетической энергии. Эту функцию выполняют те инерционные силы, которые развиваются массой тела как сопротивление изменению его скорости по величине. Очевидно, что значение кинетической энергии тела можно выразить через его массу и скорость, используя для этого выражение работы инерционных сил тела.

Представим себе точечную массу m , скорость которой возросла за время t от нуля из состояния покоя до значения v . Предположим, что выбранная нами единица времени достаточно мала для того, чтобы считать скорость равномерно возрастающей внутри этой единицы времени. Если обозначить скорость в конце первой единицы времени v_1 , в конце второй v_2 и т. д., а в конце времени t — $v_t = v$, то ускорение за первую единицу времени будет $(v_1 - 0) : 1 = v_1$, за вторую $(v_2 - v_1) : 1$, за третью $(v_3 - v_2) : 1$ и т. д., за предпоследнюю $(v_{t-1} - v_{t-2}) : 1$ и за последнюю $(v_t - v_{t-1}) : 1$. Пройденный же путь за единицу времени будет равен среднему значению скорости за это время; таким образом, путь, пройденный за первую единицу, равен $\frac{0 + v_1}{2} 1 = \frac{v_1}{2}$, за вторую $\frac{v_1 + v_2}{2} 1$, за третью $\frac{v_2 + v_3}{2} 1$ и т. д., за последнюю $\frac{v_{t-1} + v_t}{2} 1$. Инерционная сила в течение первой единицы времени равна mv_1 (произведению массы на ускорение), а ее работа за первую единицу времени $mv_1 \frac{v_1}{2}$ (произведению силы инерции на путь), за вторую $m(v_2 - v_1) \frac{v_1 + v_2}{2}$, за третью $m(v_3 - v_2) \frac{v_2 + v_3}{2}$ и т. д., за последнюю $m(v_t - v_{t-1}) \frac{v_{t-1} + v_t}{2}$. Теперь можно подсчитать и кинетическую энергию E , просуммировав все эти работы за время t :

$$E = mv_1 \frac{v_1}{2} + m(v_2 - v_1) \frac{v_1 + v_2}{2} + m(v_3 - v_2) \frac{v_2 + v_3}{2} + \\ + \dots + m(v_t - v_{t-1}) \frac{v_{t-1} + v_t}{2} = \frac{m}{2} [v_1^2 + (v_2^2 - v_1^2) + \\ + (v_3^2 - v_2^2) + \dots + (v_t^2 - v_{t-1}^2)] = \frac{m}{2} (v_1^2 + v_2^2 - v_1^2 + \\ + v_3^2 - v_2^2 + \dots + v_t^2 - v_{t-1}^2).$$

Заметим, что все члены суммы, кроме v_t^2 , взаимно уничтожаются, и что скорость v_t в конце последней единицы времени и есть скорость v в момент t . Получаем выражение кинетической энергии точечной массы $E = \frac{1}{2} mv^2$. Выражение кинетической энергии тела получим, суммируя кинетическую энергию его отдельных частиц, его точечных масс.

В поступательном движении тела все его точки в данный момент времени обладают одинаковой скоростью — скоростью движения v , и суммирование дает нам

$$E = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \dots = \frac{1}{2} v^2 (m_1 + m_2 + \dots).$$

Но сумма в скобках равна массе $\frac{G}{g}$ тела (при его весе G).

Получаем, что

$$E = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2.$$

Во вращательном движении тела около неподвижной оси с угловой скоростью ω каждая его точечная масса m , описывая окружность радиусом r , обладает скоростью $r\omega$; следовательно, ее кинетическая энергия равна $\frac{1}{2} m (r\omega)^2$. Суммирование всех этих выражений для всех масс тела дает выражение кинетической энергии E вращающегося тела:

$$E = \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2 + \dots = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + \\ + m_2 r_2^2 + \dots).$$

Но сумма в скобках нам уже знакома, это момент инерций J тела относительно его оси вращения; следовательно,

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Выражения кинетической энергии поступательно и вращательно движущихся тел позволяют нам увидеть еще одну сторону проявления массы тела и влияние ее распределения внутри тела. Здесь масса выступает как аккумулятор (накопитель) механической энергии. Из выражений кинетической энергии видно, что *при одном и том же значении скорости поступательного движения тела его запас кинетической энергии тем больше, чем больше его масса, а при одной и той же угловой скорости вращения тела его запас кинетической энергии тем больше, чем больше его момент инерции относительно оси вращения*. Таким образом, масса и момент инерции тела характеризуют его энергоаккумулирующую способность; в то же время масса и момент инерции тела характеризуют его сопротивляемость изменению скорости: чем больше масса или момент инерции, тем больше потребуются энергии для увеличения скорости на одну и ту же величину.

Принцип возможных перемещений в динамике

Выше мы упоминали о принципе возможных перемещений применительно к телу, совершающему прямолинейное равномерное движение или находящемуся в покое. Как мы видели, этот принцип является следствием закона сохранения энергии и, очевидно, может быть распространен для тел, совершающих любое движение. Что же для этого нужно? Отличительной чертой покоящегося тела или движущегося по инерции тела является отсутствие какого-либо изменения его запаса энергии (полагаем, что тело не деформируется). Во всех прочих случаях масса тела развивает инерционные силы, преодоление которых вызывает изменение кинетической энергии тела. Работа всех внешних сил должна быть равной и противоположной по знаку работе инерционных сил, так как положительной работой силы, развиваемой телом, мы считаем ту, при которой происходит отдача энергии телом, а отрицательной ту, при которой происходит накопление энергии телом. И так как сумма двух равных и противоположных по знаку величин равна нулю, следует, что сумма работ всех сил, действующих на данное тело, и всех инерционных сил, развиваемых этим телом, при его перемещении, дозволяемом его связями с другими

тeлaми, при этом не меняющимися и не допускающими утечек энергии (такие связи называются идеальными), равна нулю.

Так выглядит принцип возможных перемещений в общем случае.

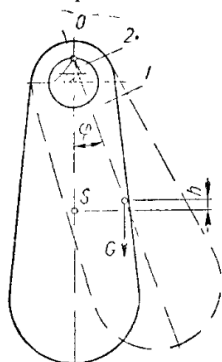
Колебания

Одним из наиболее распространенных видов механического движения являются колебания. Механическим колебанием тела называют повторяющееся прохождение его через одно и то же положение. Самым простым примером колебательного движения является колебание маятника стенных часов. Колебание может совершать не только отдельное тело, но и целая система тел, механически связанных между собой: так, например, колебаться может целое сооружение — мост, здание, целая машина — станок, двигатель, самолет. Колебания представляют собой интерес при изучении инерции материи, потому что: во-первых, они представляют собой переходы энергии из одного вида в другой и эти переходы осуществляются за счет работы инерционных сил, развиваемых колеблющимися телами; во-вторых, колебания вызываются и поддерживаются чаще всего действием инерционных сил на колеблющуюся систему; в-третьих, колебания используются как проявление действия инерционных сил с целью их измерения и обнаружения масс, их развивающих.

Рассмотрим колебание с точки зрения перехода одного вида энергии в другой.

Представим себе (фиг. 14) тело 1 , подвешенное на призматической опоре 2 . Отклоним его от вертикального положения, в котором оно находится в состоянии устойчивого равновесия, повернув его на некоторый угол ϕ около оси подвеса O , а затем отпустим его. При поворачивании тела мы затратили энергию, необходимую на подъем тела на высоту h , на которую приподнялся его центр тяжести S . Эта энергия (не считая потерь на трение в опоре и о воздух) накопилась телом в виде потенциальной энергии, равной произведению его веса G на высоту h , т. е. Gh . После того как мы отпустили тело, оно начинает приближаться к вертикальному положению с нарастающей скоростью; его ускорение вызывается действием силы веса тела. Потенциальная энергия рас-

ходуется на преодоление его сил инерции и накапливается телом в виде кинетической энергии. При прохождении через вертикальное положение эта скорость оказывается наибольшей. После прохождения через вертикальное положение сила веса тела стремится замедлить его движение, кинетическая энергия превращается в виде работы инерционных сил вновь в потенциальную энергию



Фиг. 14.

подъема центра тяжести тела, затем все повторяется. Такое тело называется маятником, а его колебания — свободными колебаниями, т. е. колебаниями, раз вызванными внешним фактором (начальным отклонением нами его от вертикали) и продолжающимися без постороннего воздействия (сила веса не считается посторонней силой, хотя она и действует на тело со стороны Земли). Вследствие потерь энергии на трение в опоре O и о воздух накопленная маятником потенциальная энергия при его отклонении не полностью превращается в кинетическую, а кинетическая —

не полностью в потенциальную; из-за этого амплитуда колебаний маятника (наибольшее его отклонение от положения равновесия) постепенно уменьшается и в конце концов колебания прекращаются — затухают.

Для поддержания колебаний необходимо пополнять энергию маятника, компенсирующую его потери энергии на трение. Это пополнение энергии производится подталкиванием маятника силой, называемой *возмущающей силой*. Если колебания сопровождаются таким посторонним силовым воздействием, они называются не свободными, а вынужденными.

Движение маятника между двумя последовательными прохождениями его через одно и то же положение и в одну и ту же сторону называется *полным колебанием маятника*. Время одного полного колебания маятника при его свободных колебаниях называется *периодом свободных колебаний* или *собственным периодом колебаний*. Собственный период колебаний является важной характеристикой колеблющейся системы; он зависит от значения массы системы и от ее распределения внутри

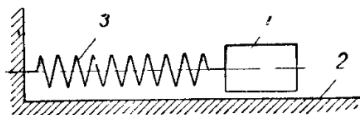
системы. Период свободных колебаний уменьшается с затуханием колебаний, но весьма незначительно. Число полных колебаний маятника, протекающих за одну секунду при его свободных колебаниях получило название собственной частоты маятника. Так как период — это длительность T одного полного колебания, выраженная в секундах, частота и период данного маятника являются взаимно обратными величинами:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Если частота толчков возмущающей силы равна собственной частоте маятника или если собственная частота кратна частоте толчков, мы говорим, что имеют место резонансные колебания, или резонанс. При резонансе и при условии, что подаваемая извне энергия толчков превышает, как это всегда и бывает, энергию, рассеивающуюся в окружающей среде благодаря трению в опоре и о воздух, размахи маятника быстро растут; при этом растут и потери энергии на трение.

Аналогичную картину (фиг. 15) представляют собой колебания тела 1 , скользящего с ничтожно малым трением по горизонтальному основанию 2 и прикрепленного к концу упругой пружины 3 , работающей и на сжатие и на растяжение. Второй конец пружины закреплен неподвижно.

Из состояния, при котором пружина не растянута и не сжата, отведем тело 1 так, чтобы натянуть пружину и, преодолев ее упругие силы, накопить в ней упругую энергию растяжения. Если затем отпустить тело, оно будет стремиться возвратиться в положение покоя, пружина начнет сокращаться; скорость тела будет расти, его ускорение будет направлено по движению; упругая энергия пружины будет расходоваться на преодоление силы инерции тела, направленной против движения, и будет накапливаться телом в виде кинетической энергии. С того момента, когда груз пройдет свое начальное положение, когда весь запас упругой энергии пружины перейдет в кинетическую энергию тела, ускоренное до сих пор движение тела замедлится, ускорение будет направлено против движения; пружина будет сжиматься инерционной силой тела, направленной по движению, кинетичес-



Фиг. 15.

кая энергия тела перейдет в упругую энергию сжатия. В тот момент, когда вся кинетическая энергия тела перейдет в упругую энергию пружины, ее сжатие прекратится и начнется движение тела в обратном направлении. Пружина расширится до начального состояния, ее упругая энергия сжатия перейдет в упругую энергию растяжения, пока тело не остановится и не повернет назад; произойдет одно полное колебание, и все опять повторится.

Здесь речь идет о свободных колебаниях тела, вполне аналогичных свободным колебаниям маятника; роль потенциальной энергии маятника в данном случае играет упругая энергия пружины. *Колебания, при которых кинетическая энергия переходит в упругую и упругая в кинетическую, протекающие с большой, сравнительно, частотой, обычно называются вибрациями*; говорят, что вибрирует резец токарного станка, сам станок может вибрировать, струна вибрирует, бывают вибрации самолета, его плоскостей и оперения, вибрация мостов и фундаментов и т. д.

Вынужденные колебания и вибрации могут быть эффективно использованы — об этом пойдет речь дальше; следует, однако, помнить, что вынужденные резонансные колебания опасны и ведут к поломкам, если их во время не погасить.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ В ТЕХНИКЕ

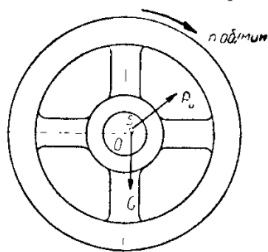
О вреде и пользе действия инерционных сил

Наблюдая, изучая и все шире, глубже и точнее познавая закономерности развития окружающего его мира, человек издавна ищет пути и средства полезного использования явлений и свойств природы.

Так происходит с основным свойством материи — инерцией. Воздействуя на окружающую его природу и созданные им предметы и орудия труда, человек преодолевает инерцию материи и вызывает действие инерционных сил.

Развиваемые ускоряемыми массами инерционные силы часто являются причиной больших неудобств и опасностей в технике и для самого человека.

Как в материальной части, так и в живых организмах и в частности в организме человека инерционные силы существенно изменяют силовое взаимодействие отдельных частей и частиц, причем эти изменения могут во много сотен тысяч раз превышать неинерционные силы взаимодействия. В машинах, механизмах, зданиях, сооружениях и устройствах силы инерции могут вызвать чрезмерные внутренние напряжения в их частях и чрезмерные поверхностные напряжения в местах их соединения, которые приводят к разрушению материала или чрезмерным его деформациям. В живых организмах инерционные силы также нарушают нормальное силовое взаимодействие между элементами самой клетки, между клетками, между кровью и сосудами, между отдельными, касающимися между собой органами и оболочками, между пищей и воздухом и органами системы питания и дыхания и т. д.



Фиг. 16.

В то же время инерционные силы искусственно вызываются там, где их действие должно либо уравновесить неизбежно действующие инерционные силы, либо вызвать полезные нам явления. Поясним и подтвердим сказанное примерами.

Представим себе колесо весом G (фиг. 16), совершающее n оборотов в минуту, с центром тяжести S , смещенным относительно оси вращения на расстояние s . Центр тяжести движется по окружности радиуса s ; он обладает центростремительным ускорением $\omega_s^n = \omega^2 s = \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 s$.

Следовательно, развиваемая колесом, инерционная сила P_u , равная произведению его массы $\frac{G}{g}$ на ускорение ω_s^n центра тяжести, будет $P_u = \frac{G}{g} \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 s$. Если $n = 3000$ об/мин, а $s = 1$ мм = 0,001 м (считаем приблизительно $\frac{\pi^2}{g} = 1$), получается: $P_u = G \left(\frac{3000}{30}\right)^2 0,001 = 10G$, т. е. сила инерции колеса оказывается в 10 раз больше его силы веса. Заметим, что сила инерции пропорциональна смещению центра тяжести тела с оси вращения

и квадрату его угловой скорости; это означает, что если число оборотов в минуту рассмотренного колеса будет не 3000, а 30000, т. е. увеличится в 10 раз, то его инерционная сила увеличится в $10^2 = 100$ раз и будет равной 1000 G , т. е. в тысячу раз больше веса колеса.

Но не только огромное значение инерционной силы по сравнению с весом тела должно нас заставить задуматься; заслуживает большого внимания тот факт, что сила эта, направленная по радиусу OS , не сохраняет постоянного направления, а вращается с колесом. Большая сила инерции будет вызывать чрезмерный износ подшипников, в которых вращается вал колеса, и самого вала, их преждевременное старение, а может быть и поломку. Изменение направления силы инерции вместе с вращением колеса будет вызывать колебания опор, самого колеса с валом, устройства, на котором установлены подшипники — машины, фундамента или сооружения, и окружающей среды, а в том числе и людей, вблизи работающих. Это объясняется тем, что действующая на подшипники то вверх, то вниз, то вправо, то влево сила инерции колеса раскачивает их в каждое последующее мгновение в другом направлении, вызывая, или, как говорится, возмущая колебания опор, разбалтывая их крепления и вызывая колебания или вибрацию окружающей среды.

Колебания в большинстве случаев вредны: вредны для зданий и сооружений потому, что вызывают осадки фундамента и трещины; вредны для машин потому, что мешают их работе, а иногда полностью нарушают ее; вредны для приборов потому, что вызывают ускоренный износ соединений их подвижных частей и искажают их показания, вредны людям потому, что сотрясения и шум мешают им работать и ускоряют старение организма; опасны тогда, когда они становятся резонансными потому, что могут вызвать поломки и разрушения вибрирующих частей машин, зданий, сооружений. Во всех случаях колебания вредны еще и тем, что вызывают рассеивание энергии, неизбежное при любом переходе или преобразовании энергии — а мы видели, что механические колебания — именно циклически повторяющиеся переходы упругой или потенциальной энергии в кинетическую и наоборот, кинетической в потенциальную и упругую.

Но при помощи инерционных сил можно вызывать и полезные механические колебания. В настоящее время вибрационная техника, т. е. техника, использующая колебания сравнительно высокой частоты и малой амплитуды, находит применение и приносит большую пользу в самых разнообразных отраслях промышленности.

В производстве деталей из чугуна применяется вибрация ковша с расплавленным чугуном. Вибрация вызывает выход из расплавленной массы шлака и газов, что повышает качество деталей, отлитых из чугуна.

Благодаря вибрации бетонной массы улучшается заполнение формы, ускоряется и улучшается уплотнение бетона и повышается во всех отношениях его качество.

Для облегчения высыпания сыпучих или кусковых материалов из бункеров также применяется вибрирование.

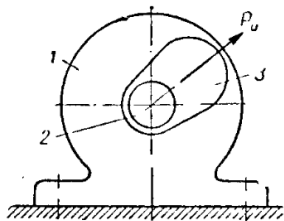
В перечисленных случаях вибрация используется лишь как вспомогательный фактор, облегчающий, ускоряющий и улучшающий протекание основного технологического процесса. Но она используется также как основное средство достижения нужного эффекта. Так, например, вибрация применяется при забивке свай вместо ударов, при этом резко снижается сопротивление грунта и свая углубляется под действием собственного веса и инерционной силы, развиваемой вибратором, который прикреплен к верхнему концу сваи.

Колебания являются основным средством просеивания в веялках, очищающих и сортирующих зерно; в грохотах, просеивающих уголь и разные другие сыпучие тела, требующие очистки и сортировки. При некоторых процессах механической обработки металлов используют вибрирующий режущий инструмент (вибропилы, пневматические молоты и зубила).

Широко используется вибрация несущих органов транспортных устройств — виброконвейеров и вибро-транспортёров. Несколько подробнее остановимся на их устройстве и работе потому, что силы инерции являются здесь не только средством вибрации (привод этих устройств может быть и не инерционным), но и средством перемещения транспортируемого материала относительно несущего органа транспортного устройства. Но прежде познакомимся с самим устройством, в котором развиваются инерционные силы, вызывающие колебания.

Инерционные вибраторы

Устройство, предназначенное для создания и поддержания вибраций, называется вибратором. Вибраторы бывают разными в зависимости от их принципа действия. В механических вибраторах колебания могут быть вызваны либо инерционной силой, переменной по направлению, либо при помощи механизма, в котором вращательное движение преобразуется в колебательное.



Фиг. 17.

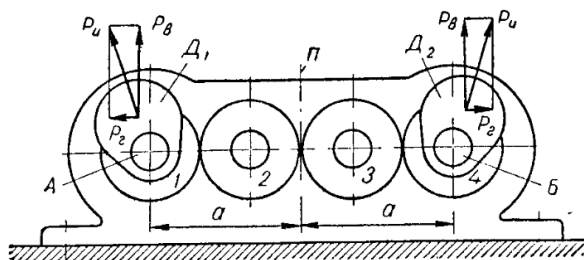
Вибраторы, в которых вибрация вызывается и поддерживается специально развиваемой инерционной силой или несколькими инерционными силами, называются инерционными вибраторами. Инерционный вибратор (фиг. 17) состоит в основном из электродвигателя 1, на валу 2 которого крепится так называемый дебаланс 3 — деталь, центр тяжести которой смещен относительно оси вращения вала электродвигателя. Центробежная инерционная сила дебаланса P_u , равная произведению массы дебаланса на центростремительное ускорение его центра тяжести, вращается вместе с валом электродвигателя, совершая столько же оборотов в минуту, и вызывает колебания той части машины или сооружения, на которой установлен вибратор.

В большинстве случаев нужны колебания в каком-то одном направлении — только вертикальном или горизонтальном. Сила же инерции такого дебаланса возбуждает колебания во всех направлениях, что вызывает ненужные затраты энергии и дополнительный износ опор вала вибратора и крепления вибратора. Этот существенный недостаток устраняется в так называемых вибраторах направленного действия.

Вибраторы направленного действия выполняются в виде двух-, трех- и многовальных вибраторов и в виде маятникового вибратора. Познакомимся с их принципами действия.

У двухвального вибратора (фиг. 18) имеются два дебаланса D_1 и D_2 , установленные один на валу А электродвигателя и второй — на другом валу Б, получающем вращательное движение от первого через зубчатую пере-

дачу. Дебалансы установлены симметрично относительно плоскости Π , перпендикулярной к плоскости осей валов и делящей пополам расстояние между ними. Так как дебалансы вращаются в противоположных направлениях с одинаковыми по величине угловыми скоростями, в любом положении сохраняется их симметричность относительно плоскости Π . На фиг. 18 они изображены



Фиг. 18.

в одном из возможных положений. Развиваемые дебалансами инерционные силы P_u равны между собой и также симметричны относительно плоскости Π , вследствие чего их горизонтальные проекции P_v взаимно уравновешиваются, а вертикальные проекции P_u — параллельные и равные между собой, дают равнодействующую силу, равную их сумме, переменную по величине, вертикально направленную то вверх, то вниз. Она достигает максимальных значений при вертикальных положениях дебалансов и равна нулю в их горизонтальных положениях.

Таким образом достигается направленность действия вибратора: силы инерции, развиваемые его дебалансами, вызывают только вертикальные колебания.

Направленный эффект вращающейся инерционной силы можно достичь и при помощи одного дебаланса, но вращающегося не около неподвижной оси, а около оси, которая сама может совершать неупругие колебания. Идет речь о так называемом маятниковом вибраторе (фиг. 19).

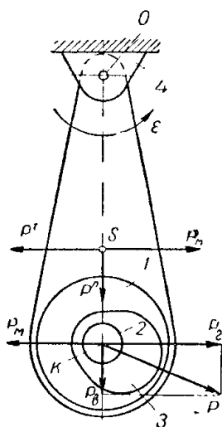
Электродвигатель 1, на валу 2 которого закреплен дебаланс 3, шарнирно подвешен к кронштейну 4, вертикальные колебания которого должны вызываться

инерционной силой дебаланса. Получается своеобразный маятник.

Инерционная сила P_u вращающегося дебаланса дает две составляющие: одну — P_o , направленную по прямой OK , вторую — P_z , направленную перпендикулярно к OK . Составляющая P_o , при небольших отклонениях маятника от вертикального равновесного положения мало отклоняется от вертикали вместе с маятником, передается через шарнирную подвеску к кронштейну и вызывает его вертикальные колебания, так как она переменна по величине и направлена то от K к O , то в противоположную сторону. Составляющая P_z вызывает колебания маятника около оси O шарнирной подвески и передается через нее к кронштейну, вызывая его горизонтальные колебания (направление P_z вместе с маятником мало отклоняется от горизонтали).

Для получения направленного вертикального возмущающего действия инерционной силы P_u необходимо, чтобы ее составляющая P_z не передавалась кронштейну, а для этого она должна полностью расходоваться на преодоление инерции маятника и сил инерции, развиваемых им в процессе колебательного движения около оси O . Найдем такое положение точки K , при котором уравниваются составляющая P_z силы инерции дебаланса с инерционными силами всего маятника. Предположим, что действие силы P_z вызывает угловое ускорение маятника ε . Обозначим J_s — центральный момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести S , параллельно оси O шарнирного подвеса; G — вес маятника; s — расстояние OS ; k — расстояние SK .

Как мы ранее установили, инерционные силы вращающегося тела, в данном случае — масс маятника, сводятся к центробежной силе инерции P^n , тангенциальной силе инерции $P^t = \frac{G}{g} s \varepsilon$ и паре инерционных сил с моментом $M_u = J_s \varepsilon$. Эту пару сил можно себе представить



Фиг. 19.

в виде двух сил P_m , равных P^t , приложенных так, как показано на фиг. 19, причем очевидно, что их плечо k должно отвечать условию

$$P_m k = M_u,$$

откуда

$$k = \frac{M_u}{P_m} = \frac{J_s \varepsilon}{P^t} = \frac{J_s \varepsilon}{\frac{G}{g} s \varepsilon} = \frac{J_s g}{G s}; \quad k = \frac{J_s g}{G s}.$$

Сила P^t и сила P_m , ей противоположная, взаимно уравновешиваются; таким образом, инерционные силы маятника сводятся к силе P^n и силе $P_m = P^t$, приложенной к точке K так, как показано на рисунке.

Так как маятник может свободно поворачиваться около оси O (мы полагаем, что трение в шарнире мало и пренебрегаем им), единственной силой его сопротивления вращению около оси O может быть сила инерции P_m . Следовательно, если составляющая P_m силы инерции дебаланса будет приложена к маятнику как раз в точке K , она полностью будет расходоваться на преодоление только силы P_2 и не будет вызывать горизонтальной реакции в шарнире O . Итак, вертикальная направленность действия силы инерции дебаланса получается при расположении оси вала дебаланса на расстоянии $k = \frac{J_s g}{G s}$ от центра тяжести всего маятника. По этой причине точка K называется *центром удара*. Она еще называется и *центром качания маятника*.

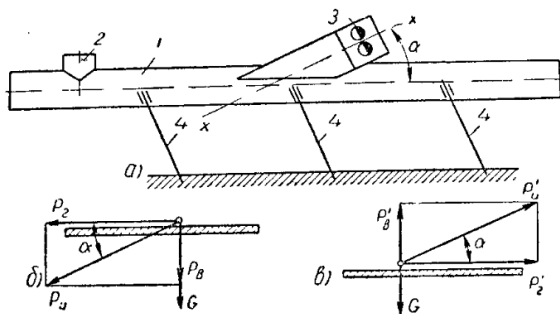
Вибротранспортеры

Как уже было указано, перемещение сыпучих и кусковых материалов по несущим органам вибротранспортеров осуществляется благодаря инерции транспортируемого материала. Несущим органом вибротранспортера (фиг. 20, *а*) служит чаще всего желоб или труба 1 с приемком 2 , через который поступает подлежащий транспортировке материал. Несущий орган колеблется на пружинящих стержнях 4 . Вибрация несущего органа создается вибратором 3 .

В современных конструкциях используются больше всего вибраторы направленного действия. На фиг. 20 схематически изображен двухвальный вибратор направ-

ленного действия. Направление возвратно-поступательного движения несущего органа составляет определенный оптимальный (наиболее выгодный) угол с направлением транспортирования (с продольной осью трубы или желоба); этот угол обозначен α .

Каждое колебание желоба состоит из двух тактов: движения вперед и вверх и возвращение назад и вниз. Каждый из этих тактов состоит из двух частей: в первой части скорость желоба возрастает от нуля до некоторого максимального значения, желоб движется ускоренно,



Фиг. 20.

ускорение желоба направлено по движению; во второй части скорость убывает до нуля, движение желоба замедленное, его ускорение направлено против движения.

Посмотрим, что происходит с частицей насыпного материала или с куском кускового; с этой целью отвлечемся от действия остальных частиц или кусков и рассмотрим лишь взаимодействие частицы с желобом.

В первой части первого такта (фиг. 20, б) частица движется вместе с желобом ускоренно. Развиваемая ею инерционная сила P_u , направленная против движения — вниз и назад, прижимает частицу к желобу, ее вертикальная составляющая P_v добавляется к весу G частицы и увеличивает, таким образом, сцепление между частицей и желобом. Горизонтальная составляющая P_z силы инерции частицы, направленная назад, стремится задержать частицу, нарушить сцепление между частицей и желобом, увлекающее ее вперед; но увеличенная сила сцепления оказывается больше инерционной составляющей P_z , и частица движется вместе с желобом,

Во второй части первого такта (фиг. 20, в) желоб движется замедленно, его ускорение направлено против движения, и сила инерции частицы направлена в направлении движения — вверх и вперед. Ее вертикальная составляющая P_v , направленная вверх, как бы облегчает частицу, уменьшает давление частицы на желоб и снижает возможное сцепление между ними. В то же время горизонтальная составляющая P'_z инерционной силы частицы оказывается достаточной для преодоления уменьшенной силы ее сцепления с желобом, и частица начинает опережать желоб, скользя по нему вперед.

В первой части второго такта (фиг. 20, в), когда желоб отходит вниз и назад, наращивая свою скорость от нуля до максимума, его ускорение направлено по движению и сила инерции частицы сохраняет свое направление вперед и вверх, частица продолжает скользить по желобу вперед.

Трение между частицей и желобом тормозит ее скольжение по желобу, и где-то во время первой части второго такта частица начинает двигаться назад вместе с желобом, но медленнее его, продолжая, таким образом, скользить по желобу вперед.

Во второй части второго такта (фиг. 20, б) происходит замедленное движение желоба, его ускорение направлено вперед и вверх, а инерционная сила частицы — назад и вниз в направлении движения. Опять, как и в первой части первого такта, горизонтальная составляющая силы инерции частицы оказывается недостаточной для преодоления силы ее сцепления с желобом, увеличенной за счет вертикальной составляющей ее инерционной силы, направленной вниз, и частица движется вместе с желобом, оставаясь на нем неподвижной до конца второго такта. Затем все повторяется.

Таким образом, за каждое полное колебание желоба частица проскальзывает по нему вперед на определенное расстояние; так осуществляется ее транспортировка вдоль желоба благодаря ее инерции, благодаря действию ее инерционной силы на связь сцепления между нею и желобом.

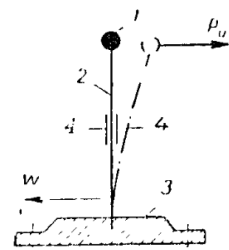
В некоторых случаях частица не то что скользит по желобу, а даже как бы подпрыгивает и летит над ним; так получается, когда вертикальная составляющая силы инерции частицы, направленная вверх, оказывается

больше ее силы веса. И если заметить, что сила веса равна произведению массы частицы на ускорение земного притяжения, а сила инерции равна произведению той же по величине массы на ускорение частицы, становится ясным, что отрыв частицы от желоба и ее полет над желобом произойдет тогда, когда вертикальная составляющая ускорения желоба, направленная вниз, окажется больше g . В этих случаях говорят, что вибротранспортер работает на режиме подбрасывания.

Естественно, что взаимодействие частиц или кусков транспортируемого таким образом материала влияет на взаимодействие с желобом каждой из частиц, с ним соприкасающихся; однако процесс транспортирования происходит в основном именно так, как описано выше.

Инерционные приборы

Свойство инерции используется в приборах для измерения линейных и угловых ускорений, а также амплитуды и частоты колебаний. Приведем примеры таких приборов.



Фиг. 21.

Инерционный прибор для измерения линейного ускорения (фиг. 21) состоит в основном из грузика 1, прикрепленного к упругой тонкой пластинке 2, закрепленной в корпусе 3. Корпус прибора прикрепляется к поступательно прямолинейно движущемуся объекту, ускорение которого подлежит измерению. При этом грузик развивает инерционную силу P_u равную произведению его массы на измеряемое ускорение w , так как грузик, участвуя в поступательном прямолинейном движении объекта, будет обладать тем же ускорением. Развиваемая грузиком инерционная сила P_u изгибает пластинку; прогиб конца пластинки, где крепится грузик, пропорционален изгибающей силе инерции.

Величина прогиба может быть измерена при помощи двух одинаковых электрических датчиков сопротивления 4, наклеенных на пластинку с двух ее сторон, один против другого. Электрические датчики сопротивления представляют собой изогнутую зигзагообразно тонкую длин-

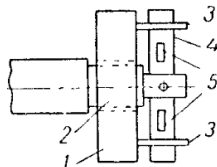
ную проволочку, прикрепляемую к детали, деформация которой подлежит измерению; через проволочку пропускается ток постоянного напряжения. Проволочка крепится к детали так, чтобы подлежащей измерению деформации — удлинению или сокращению — подвергалась и сама проволочка. При этом будет изменяться ее электрическое (омическое) сопротивление, а следовательно, и сила тока.

При изгибе пластинки проволочка одного из датчиков будет растягиваться, а другого — сокращаться, соответственно чему омическое сопротивление первого будет возрастать, а другого уменьшаться, а сила тока в первом будет уменьшаться, а в другом увеличиваться пропорционально прогибу, а следовательно, инерционной силе и ускорению.

Разность между силой тока в одном и другом датчиках может быть измерена электроизмерительным прибором, а также может быть зарегистрирована на фотопленке осциллографом — прибором, в котором поступающий электрический ток вызывает отклонение зеркала, отражающего падающий на него луч света. Отраженный луч попадает на движущуюся перед ним с определенной скоростью широкую фотопленку, оставляя на ней след в виде узенькой полоски — линии; при постоянной силе тока линия параллельна краю пленки, при переменной силе тока она имеет форму кривой. По расстоянию от точек линии до края пленки можно судить о силе тока, а следовательно, и о величине измеряемого ускорения. На пленке отмечается текущее время измерения зигзагообразной линией, идущей параллельно краю пленки; таким образом можно судить о изменении измеряемого ускорения во времени.

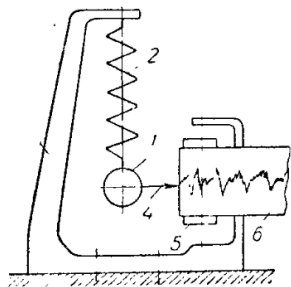
Угловое ускорение вращающихся частей машин и механизмов можно измерять с помощью инерционного прибора, устройство и принцип работы которого заключается в следующем (фиг. 22).

Массивное кольцо 1 надето на цилиндрическую шейку 2 той части вала машины, угловое ускорение которой подлежит измерению; причем, геометрические оси цилиндрической шейки вала и кольца совпадают с осью



Фиг. 22.

вращения. Кольцо надето так, что оно может свободно с очень малым трением поворачиваться на несущей его шейке. Кольцо имеет выступы 3, которыми оно обхватывает с двух сторон тонкую упругую пластинку 4, жестко прикрепленную к торцу шейки вала. Если вал с кольцом обладают угловым ускорением, масса кольца развивает инерционные силы, которые, как мы видели, сводятся к паре сил с моментом, равным произведению момента инерции кольца относительно оси вращения на его угловое ускорение. Эта пара сил инерции кольца, стремясь сохранить его угловую скорость постоянной, вызывает отставание кольца от вала при ускоренном вращении и опережение кольцом вала при замедленном вращении и, действуя на его связь с валом — на пластинку, вызывает ее деформацию — изгиб. Деформация пластинки пропорциональна моменту пары инерционных сил, а следовательно, угловому ускорению, которое можно будет косвенно измерить, в частности при помощи электрических датчиков сопротивления 5.



Фиг. 23.

Приборы для измерения ускорений называются акселерометрами, по латинскому слову «acceleratio» — ускорение. Измерение ускорений — важнейший вопрос современной техники, так как от ускорений, как мы видели, зависят инерционные силы, развиваемые ускоряемыми массами.

Измерение параметров колебаний является также важным вопросом опытного исследования колеблющихся отдельных деталей, машин, механизмов, зданий, сооружений, фундаментов и самой коры земного шара. Основными параметрами колебательного процесса являются, как мы видели, амплитуда и частота колебаний. Их измерение можно выполнить при помощи инерционного прибора (фиг. 23), состоящего в основном из груза большой массы 1, подвешенного на упругой, маложесткой пружине 2 к кронштейну 3, устанавливаемому на той части устройства, вертикальные колебания которой подлежат исследованию.

Если исследуемые колебания происходят с частотой, значительно большей частоты собственных колебаний подвешенного на пружине груза (для этого и берется груз большой массы и пружина малой жесткости), он почти не участвует в колебаниях. Это объясняется тем, что к грузу не может быть приложена сила большая, чем упругая сила пружины; и так как жесткость пружины мала, эта сила мала и может вызвать лишь совсем незначительные ускорения большой массы груза. Таким образом, кронштейн будет колебаться относительно почти неподвижного груза. Если к грузу прикрепить пишущее перо 4, а к кронштейну — вращающийся с постоянной скоростью барабан 5, протягивающий ленту 6, перо оставит на ленте след в виде кривой, высота неровностей которой будет приблизительно равна амплитуде исследуемых колебаний; зная скорость движения ленты, можно подсчитать и частоту колебаний. Такой прибор называется *вибрографом* (записывающий колебания).

Гироскопические приборы и устройства

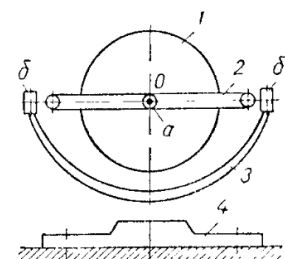
Примером замечательного использования свойства инерции в технике являются так называемые гироскопические приборы и устройства. Прообразом гироскопа является обыкновенный детский волчок. Раскрученный около своей главной центральной оси инерции, свободно опирающийся своим заостренным концом, находящимся на этой оси, на гладкую поверхность, он продолжает вращаться, сохраняя некоторое время почти неподвижной в пространстве свою ось вращения. Эта ось оставалась бы строго неподвижной, если бы не действие силы земного притяжения, вызывающей *прецессию волчка* — такое его движение, при котором ось волчка описывает коническую поверхность с вершиной, совпадающей с опорной точкой волчка. Трение между поверхностью волчка и воздухом, а также между острием волчка и опорной поверхностью поглощает кинетическую энергию волчка, запасенную им при раскручивании; силы трения преодолевают инерционные силы волчка, сопротивляющиеся падению его угловой скорости, эта угловая скорость все время постепенно уменьшается. Вследствие неровностей опорной поверхности ось вращения волчка все время отклоняется от ее первоначального положения

в пространстве; прецессия происходит со все увеличивающимся углом у вершины конуса, и если не подгонять волчок и этим самым не восстанавливать его запас кинетической энергии и положение оси вращения, волчок теряет равновесие и падает на бок.

Во вращении волчка мы наблюдаем в качестве проявления свойства инерции стремление тела, вращающегося около своей главной центральной оси инерции, сохранить неподвижной в пространстве свою ось вращения и неизменной величину своей угловой скорости. Такое проявление инерции свободно вращающегося тела названо *гироскопическим эффектом*.

Опыт убеждает нас в том, что под действием силы, перпендикулярной к оси вращения волчка, его ось будет отклоняться в направлении, перпендикулярном к действию силы.

Для того чтобы устранить прецессию, необходимо сделать так, чтобы точка опоры оси вращения тела совпала с его центром тяжести; этим устраняется влияние



Фиг. 24.

силы земного притяжения и волчок становится гироскопом. Достигается это при помощи так называемой карданной подвески (фиг. 24). Ось вращения ротора гироскопа 1 (вращающегося тела) может свободно вращаться в опорах *a* кольца 2, которое в свою очередь может свободно вращаться в опорах *b* полукольца 3; полукольцо 3 может свободно вращаться в опоре корпуса гироскопа 4.

Все три оси вращения пересекаются в неподвижной относительно корпуса гироскопа точке *O*, совпадающей с его центром тяжести.

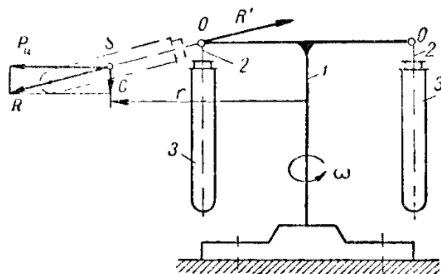
Приборы и устройства, в которых используется гироскопический эффект, называются гироскопическими. В качестве примеров гироскопических приборов назовем гирокомпасы и гиропилоты, управляющие автоматическим поддержанием курса самолета.

Примером гироскопического устройства может служить гироскопический успокоитель качки сравнительно небольших судов. Устойчивость велосипеда и мотоцикла во время их движения в значительной мере определяют

ся гироскопическим эффектом вращающихся колес. Именно с целью использования гироскопического эффекта для получения устойчивого положения пули и снаряда во время их полета в канале ствола предусматривается резьба для сообщения им вращательного движения.

Инерционные машины

Свойство инерции используется в машинах в трех направлениях: первое направление — это использование инерционных сил в качестве рабочих сил, участвующих



Фиг. 25.

непосредственно в осуществлении технологического процесса; второе направление — это использование инерционных сил в качестве движущих сил, т. е. сил, работа которых расходуется на преодоление полезного сопротивления с целью получения эффекта по назначению машины; третье направление — это использование инерционных сил для регулирования хода машин, т. е. автоматического воздействия на их скорость работы.

Примером использования инерционных сил в первом направлении может служить инерционное сепарирование — разделение разных по плотности смешанных жидкостей или отделение плавающих в жидкости твердых частиц.

Сепарирование смесей разных по плотности жидкостей осуществляется в так называемых центрифугах, широко используемых в химической технологии и молочной промышленности.

Центрифуга (фиг. 25) представляет собой вращающийся с большой угловой скоростью (от 3000 до 100000 об/мин) штатив 1, к которому в состоянии покоя

шарнирно подвешены своими серьгами 2 пробирки 3 со смесями, подлежащими сепарированию. Оси O шарнирных подвесок расположены в плоскости, перпендикулярной к оси вращения штатива, так, что пробирки могут поворачиваться около осей шарниров O в плоскостях, проходящих через ось вращения штатива I и вращающихся вместе с ним. Пробирка совершает два движения: одно вращательное около оси вращения штатива вместе со штативом и второе во время разгона — вращательное около оси O относительно штатива. Вращаясь со штативом, пробирка развивает центробежную инерционную силу $P_{ц}$, проходящую через ее центр тяжести S и действующую в шарнире на штатив через стенку пробирки и серьгу наряду с силой веса пробирки G . Но так как шарнир позволяет пробирке свободно (трение в шарнире невелико) поворачиваться, она займет такое положение (показанное на рисунке штриховой линией), при котором равнодействующая R инерционной силы $P_{ц}$ и силы веса сможет быть уравновешена силой действия (реакцией) R' штатива на пробирку. Это возможно только тогда, когда силы R и R' окажутся направленными по одной прямой; но сила R проходит через точку S , а сила R' — через точку O , следовательно, пробирка займет такое положение, при котором сила R будет направлена по пробирке (по прямой SO).

При постоянной угловой скорости штатива пробирка будет вращаться вместе с ним, как говорят, — в равновесном состоянии. При достаточно большой угловой скорости ω штатива сила веса оказывается совсем

малой по сравнению с инерционной силой $P_{ц} = \frac{G}{g} r \omega^2$

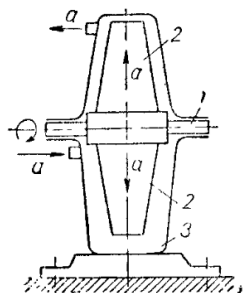
(r — расстояние от оси вращения штатива до центра тяжести пробирки в состоянии ее равновесного вращения), и пробирка занимает почти горизонтальное положение. Как в процессе разгона, так, главным образом, и во время равновесного вращения пробирки частицы находящейся в ней смеси развивают инерционные силы, пропорциональные их массам и их расстояниям от оси вращения, а если частицы одинакового объема и одинаковы расстояния от них до оси вращения, эти инерционные силы пропорциональны плотности вещества частиц. Более плотная частица расталкивает своей инерционной силой смежные менее плотные частицы и продвигается,

удаляясь от оси вращения. В результате действия центробежных инерционных сил наиболее плотные частицы оказываются наиболее удаленными от оси вращения. И если в пробирке была смесь двух жидкостей разной плотности, они разделяются так, что более плотная окажется на дне пробирки.

По принципу центрифуги работают также и сепараторы, используемые для получения сливок из молока; в сепараторах благодаря действию инерционных сил мельчайшие частицы жира оттесняются к оси вращения более тяжелыми частицами обезжиренного молока, получается сепарирование — отделение жира в виде сливок.

Важную технологическую вспомогательную роль играют центробежные инерционные силы жидкого металла в процессе так называемого *центробежного литья*.

Центробежное литье осуществляется по следующей схеме. Расплавленный металл подается по желобу, перемещающемуся вдоль оси вращения формы, в которую производится литье. Частицы жидкого металла, увлекаемые вращающейся формой, развивают инерционные силы, благодаря которым они проталкиваются ближе к форме — получается литье со сниженными пористостью и газовыми включениями, повышенной плотности, а следовательно, повышенного качества.

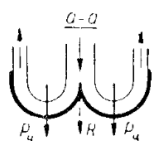


Фиг. 26.

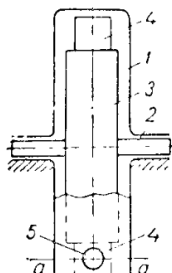
Действие центробежных инерционных сил лежит в основе работы центробежных насосов и компрессоров.

В центробежном насосе (фиг. 26), состоящем в основном из вала 1 с радиально насаженными на нем лопастями 2, установленного в подшипниках корпуса 3, частицы воздуха, увлекаемые лопастями в их вращательном движении, развивают инерционные силы, благодаря которым они стремятся перемещаться центробежно, т. е. в радиальном направлении от оси вращения, как показывают стрелки *а*. Вследствие этого в центральной части корпуса получается разрежение, и воздух засасывается из атмосферы; в периферийной части корпуса имеется отвод, по которому отбирается воздух под давлением.

Центробежные насосы используют как для подачи газов, так и жидкостей. По такому же принципу работают и центробежные компрессоры, с той лишь разницей, что насосы служат только для перемещения газов и жидкостей и повышают их давление только в той мере, в которой это необходимо для преодоления сопротивления этому перемещению, а компрессоры служат для



получения под высоким давлением газа (в частности воздуха), который затем используется как движущая или рабочая сила. В качестве примера использования движущих инерционных сил в машинах-двигателях рассмотрим принцип работы водяной турбины.



Фиг. 27.

Водяная (гидравлическая) турбина (фиг. 27) состоит из корпуса 1, в подшипниках которого вращается вал 2, несущий диск 3 с лопатками 4; вал с диском и лопатками называется ротором турбины. Вода поступает к лопаткам через трубу 5, в которой она находится под высоким давлением напора. Труба заканчивается так называемым мундштуком, благодаря форме которого, получается струя воды, выходящая из него с большой скоростью и омывающая лопатки так, как показано в разрезе $a-a$ лопатки.

Частица струи, направляемая лопаткой, описывая криволинейную траекторию, обладает центростремительным ускорением и развивает центробежную инерционную силу, действующую на направляющую лопатку. Все эти центробежные силы дают две силы P_c , равнодействующая которых R и является движущей силой, толкающей лопатку и вращающей, таким образом, ротор турбины.

В ряде рабочих машин, в которых для преодоления полезного сопротивления обрабатываемого предмета требуются большие усилия, с целью снижения необходимой мощности их привода используются механические аккумуляторы-накопители механической энергии в виде массивных колес, названных *маховиками*.

Маховики встречаются в механических ножницах и прессах. Маховик раскручивается двигателем (электромотором), и этим самым энергия, затрачиваемая двига-

телом, расходуется на преодоление инерции маховика, его инерционных сил, момент которых равен, как мы видели, произведению момента инерции маховика относительно его оси вращения на сообщаемое ему угловое ускорение. К тому моменту, когда маховик накопил необходимый запас кинетической энергии, рабочий орган машины (нож ножниц или пуансон пресса) приходит в соприкосновение с обрабатываемым предметом (разрезаемым листом или прорубаемой деталью).

Сопrotивление обрабатываемого предмета вызывает замедление вращения маховика. Развиваемые при этом его инерционные силы и используются для преодоления этого сопротивления; угловая скорость маховика снижается, он затрачивает свой запас кинетической энергии в виде работы инерционных сил на преодоление сопротивления обработки. Если бы маховика не было, потребовалась бы мощность мотора значительно большая, для того, чтобы дать необходимую энергию за весьма короткое рабочее время резки или рубки.

Интересно использование инерции маховика как движущего фактора в так называемых жиробусах-автобусах, работающих на электроинерционном двигателе. На стоянке, используя электроэнергию сети, установленный под полом жиробуса электродвигатель превращает ее в механическую энергию вращения своего ротора, выполненного в виде массивного колеса-маховика; преодолевая инерционные силы маховика, электродвигатель раскручивает его до сравнительно высокого числа оборотов в минуту (например 3000 *об/мин*), накапливая в нем значительный запас кинетической энергии за сравнительно небольшой отрезок времени — длительность «заправки». Затем электродвигатель отключают от сети и включают механическую связь маховика с движущими колесами жиробуса.

Накопленная маховиком энергия постепенно расходуется в виде работы его инерционных сил на преодоление сопротивления дороги вращению колес, а на участках подъема — также на преодоление веса жиробуса и его пассажиров. Отметим, что жироскопический эффект вращающегося маховика существенно повышает устойчивость жиробуса. Угловая скорость маховика, очевидно, снижается. Когда ее значение становится таким, при котором возможная скорость движения автобуса

оказывается ниже желаемой, необходимо произвести «заправку».

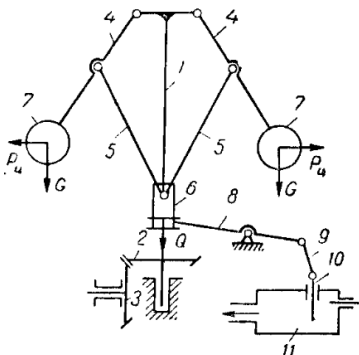
Именно по такому принципу работают автомобили-игрушки; только раскручивание маховика производится здесь вручную повторным раскручиванием задних колес.

Инерционное регулирование машин

Инерционные силы используются также в таком важном деле, как регулирование хода машин. Под регулированием хода машины мы понимаем автоматическое выравнивание поступления энергии в машину с расходом энергии с тем, чтобы ограничивать изменение скорости работы машины. Этой цели могут служить так называемые *регуляторы и модераторы*. Разница между ними заключается в том, что регулятор воздействует на поступление энергии в машину, увеличивая или уменьшая подачу энергии в машину (пара в паровую турбину или газойля в дизельный двигатель внутреннего сгорания) в соответствии с увеличением или уменьшением энергии, расходуемой машиной, а модератор воздействует на расход энергии, стараясь поддерживать его постоянным. Одним из наиболее широко известных регуляторов является центробежный конический регулятор, устройство и работа которого заключаются в следующем (фиг. 28).

Вал регулятора *1* получает вращательное движение от главного (коленчатого) вала двигателя через зубчатые колеса *2* и *3*. Таким образом, угловая скорость вала регулятора пропорциональна угловой скорости главного вала двигателя. Два рычага *4* шарнирно соединены с валом регулятора и несут на своих концах грузики *7*. Рычаги *4* соединены шарнирно с рычагами *5*, которые соединены также шарнирами с муфтой регулятора *6*. Пока угловая скорость вала регулятора сохраняется постоянной или изменяется незначительно, вращение регулятора равновесное. Центробежные инерционные силы P_c , развиваемые грузиками регулятора, действуют на рычаги *4* и *5*, стремясь приподнять муфту регулятора *6*; однако их действие уравнивается действием силы веса муфты Q и сил веса G самых грузиков, которые стремятся свести грузики и опустить муфту, и муфта не поднимается и не опускается. Когда же расход энергии двигателя уменьшается и энергии поступает в двигатель больше, чем расходуется, избыток энергии

идет на увеличение скорости работы машины, накапливаясь в ней в виде кинетической энергии. Растет угловая скорость главного вала и вала регулятора. Растут центробежные инерционные силы P_u грузиков, и их действие оказывается больше действия сил G и Q ; муфта приподнимается и через рычаги 8 и 9 опускает заслонку 10, перекрывающую доступ энергии в машину. В результате замедляется ход машины, уменьшаются угловая скорость вала регулятора и силы P_u , грузики сходятся, муфта опускается, а заслонка приподымается, увеличивая доступ энергии в машину. Получается затухающий колебательный процесс — то увеличивается, то



Фиг. 28.

уменьшается угловая скорость вала регулятора, который довольно быстро заканчивается тем, что грузики оказываются в новом равновесном положении, при новой угловой скорости вала регулятора и главного вала машины, мало отличающейся от той, которая была до изменения расхода энергии. Если расход энергии двигателя увеличивается, скорость вала регулятора уменьшается, инерционные силы уменьшаются, грузики сходятся и происходит тот же колебательный процесс до установления нового равновесного положения грузиков и муфты регулятора. Примером модератора, работающего также благодаря действию центробежных инерционных сил и их зависимости от угловой скорости, может служить модератор, используемый в авиации для регулирования угла установки лопастей винта самолета с целью поддержания постоянным сопротивление воздуха, действующего на лопасти винта, а следовательно, и постоянной энергию, полезно расходуемую двигателем самолета.

Силы инерции и невесомость

В завершении второй главы рассмотрим эффект одновременного действия на связи между предметами их сил веса и инерционных сил, ими развиваемых.

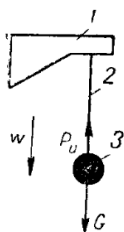
Предположим (фиг. 29), что в руке мы держим кронштейн 1, к которому подвешен на нити 2 груз 3. При неподвижном кронштейне или его равномерном прямолинейном движении сила натяжения нити, очевидно, равна силе веса груза G (если пренебречь весом самой нити). Если же кронштейн опускаться ускоренно с ускорением ω , направленным вниз, груз будет развивать инерционную силу P_u , направленную вверх и равную

произведению его массы $\frac{G}{g}$ на ускорение ω :

$$P_u = \frac{G}{g} \omega.$$

Эта сила будет действовать на нить одновременно с силой веса G . До тех пор, пока сила P_u остается меньше силы G , нить будет натянута силой P , равной их разности:

$$P = G - P_u = G - \frac{G}{g} \omega.$$



Фиг. 29.

Но как только ускорение ω достигнет значения g ускорения свободного падения, натяжение P станет равным нулю, как это видно из написанного выше выражения. Получается, что действие силы веса на связь груза с кронштейном, т. е. на нить, уравнивается действием на нее силы инерции; такое состояние груза принято называть состоянием его невесомости.

Таким образом, *невесомостью предмета является такое его состояние ускоренного движения, при котором, развиваемая им инерционная сила уравнивает действие силы земного притяжения на связи этого предмета с другими предметами.*

Представим себе, что космический корабль с человеком на борту выведен на круговую орбиту и движется по ней по инерции. Это возможно лишь в том случае, если скорость центра тяжести корабля, движущегося по орбите, будет достаточно точно соответствовать радиусу орбиты. Если обозначить r — расстояние центра тяжести корабля от поверхности Земли, R — радиус Земли, M — массу Земли, m — массу корабля, сила F — взаимного тяготения Земли и корабля, т. е. сила, с которой корабль притягивается Землей, составит, как мы видели,

$$F = f \frac{mM}{(R + r)^2}.$$

Но при $r=0$, т. е. на поверхности Земли, эта сила равна весу корабля, т. е. mg :

$$mg = f \frac{mM}{R^2},$$

откуда

$$fmM = mgR^2$$

и, следовательно,

$$F = f \frac{mM}{(R+r)^2} = \frac{mgR^2}{(R+r)^2}.$$

Такая сила будет вызывать центростремительное ускорение ω^n корабля, равное

$$\omega^n = \frac{F}{m} = \frac{gR^2}{(R+r)^2}.$$

Так как единственная сила, действующая на корабль, это сила F , корабль будет двигаться устойчиво, если изменение его скорости будет происходить именно с таким центростремительным ускорением, какое вызывает сила F , т. е. с ускорением ω^n . Но между скоростью v движения точки по окружности, ее радиусом $R+r$ и центростремительным ускорением существует, как было выше показано, зависимость

$$\omega^n = \frac{v^2}{R+r},$$

откуда

$$v = \sqrt{\omega^n (R+r)} = \sqrt{\frac{gR^2}{(R+r)^2} (R+r)},$$

т. е.

$$v = R \sqrt{\frac{g}{R+r}}.$$

Значит, если, например, $r = 200$ км, то, учитывая, что $R = 6378$ км, $g = 9,81$ м/сек² = 0,00981 км/сек², получаем так называемую первую космическую скорость на высоте 200 км, т. е. ту скорость v_{200} , которая обеспечивает устойчивое движение по круговой орбите соответствующего радиуса ($6378 + 200 = 6578$ км):

$$v_{200} = 6378 \sqrt{\frac{0,00981}{6378 + 200}} = 7,79 \text{ км/сек.}$$

То, что было сказано для корабля в целом, справедливо для тел, находящихся в нем, если их центры тяжести находятся на орбите центра тяжести корабля. Следовательно, человек в корабле, стоя или сидя,

будет двигаться по орбите корабля совершенно независимо от движения самого корабля; это говорит о том, что он не будет испытывать никаких силовых воздействий со стороны корабля, что он сможет и висеть в пространстве корабля, ни о что не опираясь. Это и есть как раз состояние невесомости, состояние, при котором, как мы уже говорили, развиваемая человеком инерционная сила разгружает его связи с окружающими предметами от действия его силы веса.

Действительно, центробежная инерционная сила, развиваемая любым предметом и человеком, действующая на его связи с окружающими предметами, оказывается равной произведению его массы на ускорение ω^2 , т. е. как раз его силе веса в условиях орбиты. Если космонавт стоит на полу корабля, его ноги не ощущают никакого давления со стороны пола так же, конечно, как и пол не испытывает никакого нагружения со стороны человека. Но такое разгружение связей происходит и внутри человеческого организма; так, например, вес комка пищи, поступившей в желудок, не будет давить на стенки желудка, так как действие силы веса на связь между комком и желудком будет уравниваться действием на эту связь инерционной силы, развиваемой этим комком. Однако, как установлено исследованиями космонавтов в полете, эти отклонения от земной нормы в основном не мешают выполнению космонавтом его функций.

Приведенные в этом разделе примеры использования инерции в технике выделены автором как наиболее яркие и иллюстрирующие и, конечно, ни в коей мере не исчерпывают все известные и возможные применения в технике этого замечательного свойства материи.

УРАВНОВЕШИВАНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

Задача и предмет уравнивания

Как было сказано выше, мы должны стремиться к тому, чтобы свести к минимуму отрицательное влияние инерционных сил там, где они возникают независимо от нашего желания, как естественное проявление закона инерции движущейся материи. Единственно возможный путь устранения влияния инерционных сил — это такое распределение масс внутри данной конструкции, при ко-

тором развиваемые этими массами инерционные силы взаимно уравниваются и не передаются окружающей среде, не влияют на связи данной конструкции с окружающими ее телами. При этом, конечно, влияние инерционных сил на саму конструкцию не только не уменьшается, а, наоборот, может увеличиваться и усугубляться.

Для того чтобы устранить влияние инерционных сил, развиваемых массами данной конструкции на саму конструкцию, на связи между ее составными частями, необходимо уравнивать каждую из таких частей в отдельности, т. е. внутри каждой из них, так размещать ее массу, чтобы инерционные силы, ею развиваемые, взаимно уравнивались. Посмотрим, в каких случаях это осуществимо.

Если тело совершает поступательное движение, все его точки обладают в данный момент одинаковыми по величине и направлению ускорениями и, как бы не размещали массы внутри объема тела все развиваемые ими силы инерции, окажутся параллельными между собой и направленными в одну и ту же сторону; такие силы никак не могут взаимно уравниваться. Следовательно, об уравнивании отдельно взятого поступательно движущегося тела говорить не приходится. Другое дело, если тело совершает вращательное движение; как мы уже видели, взаимное уравнивание инерционных сил, развиваемых массами такого тела, принципиально вполне осуществимая задача.

И так как основными источниками инерционных сил являются неравномерно и непрямолинейно движущиеся массы в механизмах и машинах, *предметом инерционного уравнивания может быть машина или механизм в целом и отдельные их вращающиеся части* — звенья, называемые, как уже было указано, роторами.

Итак, задача уравнивания инерционных сил решается в двух направлениях: так называемого уравнивания машин на фундаменте и уравнивания роторов.

Уравнивание машин на фундаменте

Такое название объясняется тем, что целью уравнивания машины в целом является разгрузка фундамента или сооружения, на котором она установлена,

от действия инерционных сил, развиваемых ее звеньями. Как правило, в процессе проектирования машины имеется в виду также и условие получения уравновешенной конструкции, и достигается это тремя путями.

Первый путь — конструктор создает или выбирает такую схему машины, при которой одинаковые по своему назначению, форме и весу звенья развивают равные, но противоположно направленные взаимно уравновешивающиеся силы инерции.

Второй путь — конструктор предусматривает специальные вспомогательные звенья, единственной ролью которых является развитие инерционных сил, которые уравновешивали бы инерционные силы основных звеньев машины.

Третий путь — конструктор увеличивает массы основных звеньев и размещает их так, чтобы инерционные силы взаимно уравновешивались.

В первом случае получаются симметричные машины, так называемые вследствие симметрично расположенных, симметрично движущихся звеньев, развивающих симметричные, взаимно уравновешивающиеся инерционные силы.

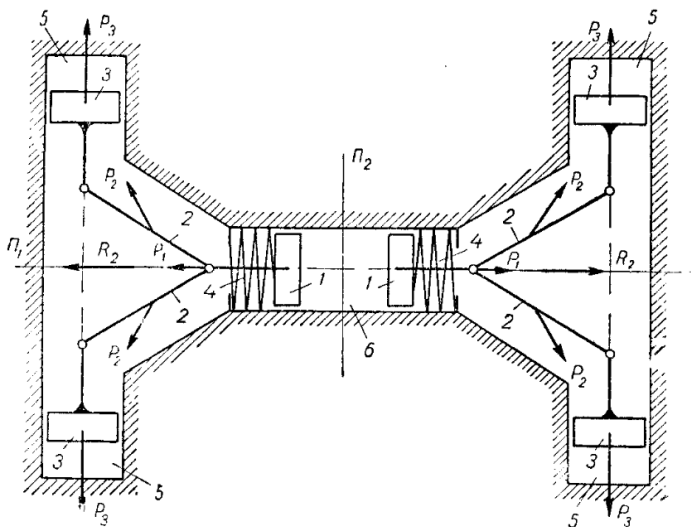
Во втором случае получаются машины с реактивными массами; так называют массы вспомогательных звеньев потому, что развиваемые ими силы инерции являются реакциями, противодействием инерционным силам, развиваемым массами основных звеньев этих машин.

В третьем случае получаются машины с противовесами — так называются добавляемые массы.

Приведем примеры этих трех путей решения задачи. Симметричные машины мы встречаем в машинах-двигателях, в сельскохозяйственных и горных машинах, в машинах-автоматах в легкой и пищевой промышленности и в других машинах.

Примером симметричной машины с полным уравновешиванием может служить гидромеханический пресс, схема которого приведена на фиг. 30. Жидкость поступает под давлением в цилиндр 6 и раздвигает поршни 1, которые через шатуны 2 сообщают поступательное движение поршням 3, перемещающимся в цилиндрах 5; между поршнями 3 и днищами цилиндров 5 и осуществляется процесс прессования поступающей туда опреде-

ленными порциями массы. Затем открывается выпускной клапан, жидкость уходит из цилиндра 6 и пружины 4 сводят поршни 1; при этом поршни 3 отходят и оставляют место для загрузки свежей порции прессуемого материала. Такое симметричное относительно плоскостей Π_1 и Π_2 размещение и движение звеньев машины обеспечивает полное взаимное уравнивание их:



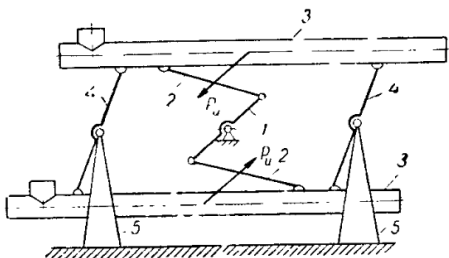
Фиг. 30.

инерционных сил. На фиг. 30 показаны возможные направления действия инерционных сил. Видно, что равные между собой и противоположно направленные силы инерции P_1 поршней 1 взаимно уравниваются, попарно взаимно уравниваются силы инерции P_3 поршней 3.

Силы инерции P_2 шатунов 2 дают две равные и противоположно направленные равнодействующие R_2 , которые также взаимно уравниваются.

На фиг. 31 приведен пример неполного симметричного уравнивания — уравнишенный вибрационный конвейер, используемый в горнорудной промышленности. Только привод осуществляется от электромотора не при помощи вибратора, а при помощи рычажного механизма,

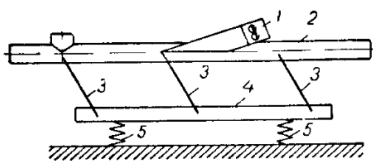
состоящего из равномерно вращающегося симметричного кривошипа 1 и шатунов 2, шарнирно связанных с трубами 3. Трубы 3 соединены между собой шарнирно рычагами 4, которые могут свободно поворачиваться в опорах стоек 5.



Фиг. 31.

Инерционные силы P_u симметрично вибрирующих труб 3 равны между собой, параллельны и противоположно направлены; они образуют воспринимаемую опорами 5 пару инерционных сил с сравнительно небольшим инерционным моментом.

Примером машины с реактивной массой может служить вибрационный конвейер, схематически изображенный на фиг. 32. Инерционный вибратор направленного действия 1 вызывает вибрации трубы 2 и связанной с ней упругими пластинами 3 рамы 4, опирающейся пружинами 5 на фундамент. Рама 4 и является реактивной массой; ее назначение — развивать инерционную силу, которая уравновешивала бы инерционную силу трубы 2.

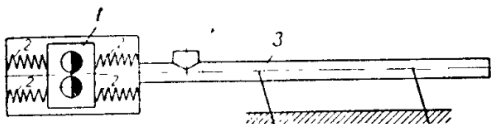


Фиг. 32.

Сам вибратор может служить реактивной массой, если соответствующим образом подобрать его массу и связать его двусторонней упругой связью с трубой так, как это показано на фиг. 33.

Инерционная сила, развиваемая вибратором, действует через пружины 2 на трубу 3, которая в свою очередь развивает инерционную силу, равную и противоположную инерционной силе вибратора при равных массах вибратора и трубы и действующую на него через те же пружины 2. Получается их взаимное уравновешивание.

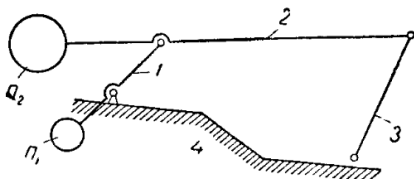
Приведем также пример использования противовесов с целью получения уравновешенной конструкции. В машинах часто используется механизм шарнирного четырехзвенника (фиг. 34). Кривошип 1 совершает вращательное движение, которое передается шатуном 2 коромыслу 3, совершающему вращательно-колебательное



Фиг. 33.

движение. Можно так подобрать и рассчитать веса противовесов P_1 и P_2 и их так расположить на звеньях 1 и 2, что получится полное взаимное уравновешивание всех инерционных сил механизма.

Следует отметить, что чаще всего на практике применяется не полное уравновешивание всех инерционных



Фиг. 34.

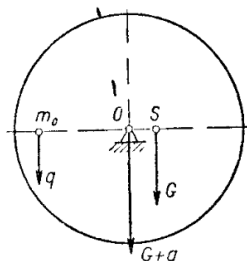
сил машины или механизма, а частичное уравновешивание, во-первых, потому, что полное уравновешивание требует чрезмерно сложного конструктивного решения, часто практически неосуществимого; во-вторых, потому, что в полном уравновешивании и необходимости нет, так как оставшиеся после частичного уравновешивания неуравновешенные инерционные силы не вызывают значительных нагрузок и колебаний.

Очевидно, что какая-то неуравновешенность сохраняется и при полном уравновешивании машины вследствие неизбежных отклонений размеров и весов элементов любой выполненной конструкции от их расчетных, теоретически необходимых значений.

Уравновешивание роторов

Как было сказано выше, полное взаимное уравновешивание инерционных сил, развиваемых массами вращающегося тела-ротора, достигается осуществлением трех условий:

1) центр тяжести ротора должен находиться на оси вращения ротора;



Фиг. 35.

2) центробежные моменты инерции ротора J_{xz} и J_{yz} относительно оси вращения ротора z и двух взаимно и ей перпендикулярных осей x и y должны равняться нулю;

3) угловое ускорение ротора должно равняться нулю.

Очевидно, что третье условие от самого ротора не зависит, так как угловое ускорение ротора определяется силами, действующими на него. Поэтому, когда речь идет об уравновешивании ротора, имеется в виду выполнение первых двух условий, т. е. уравновешивание только его центробежных сил инерции.

Посмотрим, как осуществимы эти условия. Представим себе ротор (фиг. 35) весом G с центром тяжести S , находящимся на расстоянии s от его оси вращения O , перпендикулярной к плоскости фигуры. Для того чтобы привести центр тяжести на ось вращения, проще всего добавить массу m_0 на продолжении отрезка SO так, чтобы равнодействующая сил веса ротора и силы веса добавляемой массы q проходила через точку O . Как было показано при рассмотрении параллельных сил, какими являются силы веса G и q , расстояния от двух параллельных сил до их равнодействующей обратно пропорциональны этим силам; следовательно, если мы хотим, чтобы равнодействующая $G+q$ сил G и q проходила через точку O , необходимо, чтобы

$$\frac{OS}{Om_0} = \frac{q}{G},$$

откуда

$$qOm_0 = GOS.$$

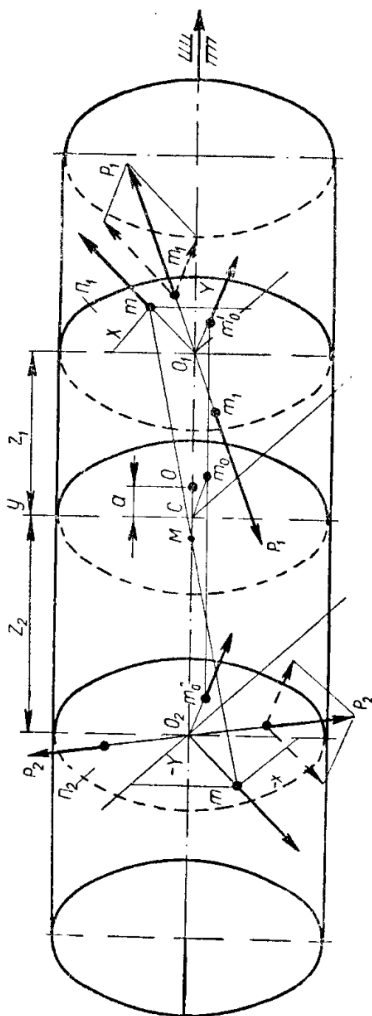
Обозначая расстояние Om_0 через r , получаем:

$$qr = Gs.$$

Следовательно, добавив к ротору грузик весом q на расстоянии r от оси вращения, мы приведем центр тяжести ротора на его ось вращения, если будет соблюдено вышенаписанное равенство.

Приведение к нулю центробежных моментов инерции ротора можно достичь прибавлением некоторых масс. Это необходимо сделать так, чтобы не сбить центр тяжести ротора с его оси вращения (сместить его вдоль оси вращения можно). Мы достигнем желаемого результата, если добавим (фиг. 36) две одинаковые массы m , симметрично расположенные относительно оси вращения. Так как массы m одинаковы и симметричны относительно оси вращения, их центр тяжести окажется в точке M , лежащей на оси вращения, посередине между ними. Новый центр тяжести ротора переместится из O в точку C , лежащую на оси вращения между точками O и M на расстоянии a от O .

Направим ось z по оси вращения ротора, а оси x и y через новый центр тяжести ротора — точку C .



Фиг. 36.

Как правило, добавлять к ротору массы удобнее в плоскостях, перпендикулярных к его оси вращения, и по разные стороны от центра тяжести. Пусть такими плоскостями будут плоскости Π_1 и Π_2 , находящиеся на расстояниях z_1 и z_2 от точки C . Координаты этих двух масс X и $-X$, Y и $-Y$, Z_1 и $-Z_2$ мы определим так, чтобы центробежные моменты инерции ротора были равны нулю:

$$\begin{aligned} \text{и} \quad J_{xz} + mXZ_1 + m(-X)(-Z_2) &= 0 \\ J_{yz} + mYZ_1 + m(-Y)(-Z_2) &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \text{и} \quad J_{xz} + mX(Z_1 + Z_2) &= 0 \\ J_{yz} + mY(Z_1 + Z_2) &= 0. \end{aligned}$$

Обозначая расстояние между плоскостями Π_1 и Π_2 через d ($Z_1 + Z_2 = d$), получаем:

$$J_{xz} + mXd = 0$$

и

$$J_{yz} + mYd = 0,$$

откуда

$$mX = -\frac{J_{xz}}{d} \quad \text{и} \quad mY = -\frac{J_{yz}}{d}.$$

Массу m_0 можно заменить двумя массами m'_0 и m''_0 , располагаемыми в плоскостях Π_1 и Π_2 так, чтобы сохранить и положение центра тяжести ротора и значения центробежных моментов инерции ротора. Для этого у масс m'_0 и m''_0 должны быть такие же координаты x и y , как и у массы m_0 , а значения этих масс должны быть обратно пропорциональны расстояниям $Z_1 - a$ и $Z_2 + a$:

$$\frac{m'_0}{m''_0} = \frac{Z_2 + a}{Z_1 - a}$$

и в сумме составлять

$$m'_0 + m''_0 = m_0.$$

Действительно, при таких соотношениях центр тяжести масс m'_0 и m''_0 совпадает с точкой m_0 и равнодействующая их сил веса равна весу массы m_0 ; следовательно, центр тяжести ротора не изменяется. Их суммарные центробежные моменты инерции составят

$$m'_0 x_0 Z_1 + m''_0 x_0 (-Z_2) = x_0 (m'_0 Z_1 - m''_0 Z_2)$$

и

$$m'_0 y_0 Z_1 + m''_0 y_0 (-Z_2) = y_0 (m'_0 Z_1 - m''_0 Z_2).$$

Но

$$m'_0 (Z_1 - a) = m''_0 (Z_2 + a),$$

откуда

$$m'_0 Z_1 - m''_0 Z_2 = a (m'_0 + m''_0) = a m_0.$$

Они оказываются равными центробежным моментам инерции самой массы m_0 , $m_0 x_0 a$ и $m_0 y_0 a$.

Теперь в плоскостях Π_1 и Π_2 оказалось по две массы.

Покажем, что эти четыре массы можно заменить двумя массами m_1 и m_2 . Если считать, что роль добавляемых масс заключается в том, чтобы развивать центробежные инерционные силы, которые уравновесят инерционные силы ротора, то, очевидно, можно подобрать массу m_1 в плоскости Π_1 так, чтобы развиваемая ею центробежная сила инерции совпадала по величине и направлению с равнодействующей сил инерции, развиваемых массами m и m'_0 , а в плоскости Π_2 — массу m_2 , сила инерции которой совпадала бы с равнодействующей инерционных сил масс m и m''_0 так, как показано на фиг. 36.

Итак, мы приходим к выводу, что полное уравновешивание инерционных сил ротора можно осуществить, добавляя ротору две массы m_1 и m_2 в двух плоскостях Π_1 и Π_2 , перпендикулярных к оси вращения ротора.

Плоскости Π_1 и Π_2 называются *плоскостями исправления* (мы исправляем в них неуравновешенность ротора), а массы m_1 и m_2 — *уравновешивающими* массами.

Развиваемые ими центробежные силы инерции P_1 и P_2 уравновешивают центробежные силы инерции, развиваемые основной массой ротора. Естественно представить себе, что сила P_1 уравновешивает противоположную ей силу P_1 , развиваемую частицей основной массы ротора, равной m_1 , расположенной в плоскости Π_1 симметрично относительно оси вращения ротора. Аналогично можно себе представить, что сила инерции P_2 уравновешивает противоположную ей силу инерции P_2 , развиваемую частицей основной массы ротора, равной m_2 , расположенной в плоскости Π_2 симметрично относительно оси вращения ротора. Иначе говоря, неуравновешенность ротора можно отнести за счет двух неуравновешенных масс, расположенных в плоскостях исправления

симметрично уравнивающим массам, относительно оси вращения ротора и равных им. Отсюда вывод, что вместо того, чтобы добавлять уравнивающие массы, можно удалять (например, высверливанием) неуравновешенные массы ротора, что зачастую и делается, особенно при полуавтоматическом и автоматическом уравнивании роторов.

Причины неуравновешенности ротора и стадии ее устранения

При проектировании роторов конструктор стремится к получению уравновешенной конструкции. Однако даже если ему это удается, при изготовлении отдельных частей ротора и их сборке неизбежны отклонения как формы, так и размеров от номинальных, т. е. тех, которые принимались конструктором в расчетах. И несмотря на то, что эти отклонения остаются в пределах допусков на изготовление, т. е. меньше допустимых отклонений, они вызывают обычно такое изменение как величины, так и размещения массы ротора, при котором его неуравновешенность становится недопустимой. Но представим себе, что нам удалось обнаружить и устранить неуравновешенность готового ротора. Соберем машину, в состав которой входит этот ротор, и он оказывается, как говорят, в рабочих опорах. В машине ротор подвергается воздействию сил, а очень часто и высоких температур. И в результате действия сил и нагрева ротор деформируется, опять в какой-то мере искажаются его форма и размеры, которые он имел во время его уравнивания перед установкой в рабочие опоры, нарушается его уравновешенность и тогда приходится уравнивать его непосредственно в рабочих опорах.

Итак, ротор может подвергаться уравниванию три раза: в процессе его конструирования, после изготовления и сборки на специальных установках и в рабочих опорах, после сборки всей машины. *Уравнивание ротора на специальных установках и в рабочих опорах называется балансировкой ротора.* Специальные установки, на которых производится балансировка роторов, получили название *балансировочных стенов и станков.* К балансировочному оборудованию относятся также приборы, используемые при балансировке в рабочих опорах.

Уравновешивание очень больших и тяжелых роторов, таких, как роторы турбин и генераторов большой мощности, практически неосуществимо на балансировочных станках; они балансируются в рабочих опорах. Если целью балансировки является только приведение центра тяжести ротора на его ось вращения, то это будет *статическая балансировка*. Если же идет речь о полном уравновешивании инерционных сил ротора, то такая балансировка называется *динамической, или сложной, или полной*. Название *статическая балансировка* объясняется тем, что обнаружить и измерить смещения центра тяжести ротора с оси вращения можно без раскручивания ротора, т. е. в статическом состоянии ротора, исследуя действие на его равновесие силы земного притяжения. *Динамической* балансировка называется потому, что обнаружение и измерение динамической неуравновешенности ротора, неравенства нулю его центробежных моментов инерции производится *раскручиванием ротора*; таким образом вызывается действие его инерционных сил на опоры ротора.

Во всех случаях балансировка быстро вращающихся (совершающих свыше 300 об/мин) роторов является необходимым технологическим мероприятием, завершающим как процесс изготовления и сборки нового ротора, так и процесс ремонта старого ротора. От хорошо выполненной балансировки ротора зависят его эксплуатационные качества и в первую очередь его долговечность и долговечность машины в целом, а также безвредность ее работы.

Балансировка ротора состоит из двух операций: измерения неуравновешенности и ее устранения. На современных балансировочных полуавтоматах и автоматах выполняются обе эти операции.

Оценка неуравновешенности ротора и допустимая неуравновешенность

В результате измерения неуравновешенности ротора в процессе балансировки мы получаем данные с определенной степенью точности, зависящей от метода балансировки, от балансировочного оборудования, от того кто выполняет балансировку и от условий балансировки, например постоянства температуры. Обнаруженную

неуравновешенность можно устранять также лишь с определенной степенью точности. Очевидно, что в результате допущенных при балансировке неточностей отбалансированный ротор будет обладать определенной так называемой остаточной неуравновешенностью, которая, однако, не должна превышать допустимой. Необходимо, следовательно, заранее знать допустимую неуравновешенность ротора, или, как говорят, допустимый *остаточный дебаланс ротора*. Появляется необходимость, во-первых, количественной оценки неуравновешенности и, во-вторых, определения допустимого остаточного дебаланса.

Неуравновешенность ротора оценивается наибольшим значением отношения произведения неуравновешенной массы ротора m_1 или m_2 на ее расстояние от оси вращения (r_1 или r_2) к массе ротора $\frac{G}{g}$, т. е. $\frac{m_1 r_1}{\frac{G}{g}}$ или $\frac{m_2 r_2}{\frac{G}{g}}$.

Если представить себе, что идет речь только о приведении центра тяжести ротора на ось вращения (фиг. 35), произведение неуравновешенной массы $\frac{q}{g}$ на ее расстояние r от оси вращения, поделенное на массу ротора $\frac{G}{g}$, даст нам расстояние s от центра тяжести ротора S до оси вращения O ; действительно, из равенства $qr = Gs$ следует

$$\frac{q}{g} r = \frac{G}{g} s,$$

откуда

$$\frac{\frac{q}{g} r}{\frac{G}{g}} = s.$$

Таким образом, *неуравновешенность ротора измеряется смещением центра тяжести ротора от оси вращения*. Это смещение реально, когда идет речь о неуравновешенности только вследствие ненахождения центра тяжести на оси вращения; но оно условно, когда идет речь о полной неуравновешенности ротора, оцениваемой указанными отношениями. Очевидно, что отношения $\frac{m_1 r_1}{\frac{G}{g}} = s_1$

и $\frac{m_2 r_2}{\frac{G}{g}} = s_2$ у данного ротора, во-первых, не равны между

собой, во-вторых, зависят от расстояния d между плоскостями исправления. Так что эти условные смещения центра тяжести ротора s_1 и s_2 с оси вращения характеризуют его неуравновешенность лишь при данном расположении его плоскостей исправления. Если в этих отношениях веса m_1g и m_2g неуравновешенных масс выражать в граммах, их расстояния r_1 и r_2 от масс до оси вращения — в миллиметрах, а вес ротора в килограммах, как это удобнее всего делать, то смещения s_1 и s_2 получатся в микронах (1 мк равен тысячной доле миллиметра). Действительно,

$$\frac{m_1gr_1}{G} \frac{\Gamma_{мм}}{\kappa\Gamma} = \frac{1}{1000} \frac{m_1gr_1}{G} \frac{\kappa\Gamma_{мм}}{\kappa\Gamma} = \frac{1}{1000} \frac{m_1gr_1}{G} мм = \frac{m_1gr_1}{G} мк.$$

Иногда для оценки неуравновешенности ротора пользуются амплитудой колебаний рабочих опор ротора, вызываемых действием его неуравновешенных инерционных сил.

Следует отметить, что такая оценка неуравновешенности ротора, хотя и практична потому, что отражает количественно основной отрицательный эффект неуравновешенности — вибрацию опор, но не может характеризовать неуравновешенность ротора, так как зависит еще и от других факторов, как, например, неправильная форма опорных шеек ротора. Такая оценка и применяется главным образом в тех случаях, когда ротор, будучи достаточно гибким, существенно меняет свою форму в процессе работы в своих рабочих опорах, вследствие чего оценка его неуравновешенности по смещению центра тяжести не может иметь практического смысла.

В настоящее время ни у нас, ни за границей нет теоретически обоснованных стандартов на допустимую неуравновешенность роторов. Отдельными исследователями даются рекомендации по значениям допустимых смещений и допустимых амплитуд в виде расчетных эмпирических формул для расчета допустимых смещений, таблиц этих смещений для разных роторов, графиков допустимых амплитуд колебаний опор.

Некоторые данные, заимствованные из книги В. С. Васильева и П. С. Кутко «Станки и приборы для динамической балансировки», о допустимых смещениях центра тяжести ротора приведены на стр. 86.

Виды роторов	Смещение центра тяжести в мк
Круги, роторы, валы и шкивы точных шлифовальных станков	0,2—1,0
Роторы высокооборотных электродвигателей, малых и средних газовых турбин, быстроходных воздуходувок	0,5—2,5
Роторы нормальных электродвигателей, вентиляторов, коленчатые валы двигателей внутреннего сгорания	5—25
Роторы тихоходных сельскохозяйственных и дорожно-строительных машин	20—100
Автомобильные колеса	100—600

В книге В. С. Васильева и П. С. Кутко приводятся формулы для определения допустимого смещения s в зависимости от числа n оборотов в минуту ротора; одна из этих формул

$$s = \frac{2 \cdot 10^8}{n^2} \text{ мк.}$$

Следует отметить, что большое влияние на допустимый остаточный дебаланс имеет соотношение между массой ротора и массой всей машины. Приведенная формула пригодна для случая, когда масса ротора составляет половину массы всей машины в целом. Чем меньше масса ротора по сравнению с массой всей машины, тем большими могут быть значения остаточного смещения. На допустимую неуравновешенность ротора влияет также отношение собственной частоты колебаний машины (число полных свободных колебаний в секунду) к частоте вращения ротора ($\frac{n}{60}$ оборотов в секунду). Это отношение не должно быть меньше чем 1,2; чем оно больше, тем большим может быть остаточный дебаланс ротора. Очень важно определить, достаточно ли произвести статическую балансировку или необходима динамическая (полная) балансировка данного ротора. Вопрос этот имеет большое практическое значение, так как динамическая балансировка несравненно сложнее статической, требует более дорогостоящего оборудования; ее применение должно быть оправдано.

Рекомендации разных авторов к решению этого вопроса можно кратко свести к следующему:

а) тихоходные роторы, совершающие до 300 об/мин, достаточно балансировать статически;

б) роторы, совершающие свыше 300 об/мин, должны подвергаться динамической балансировке, если их осевой

габаритный размер (длина вдоль оси вращения) больше габаритного (наибольшего) диаметра;

в) если отношение габаритной длины к габаритному диаметру меньше единицы у ротора, вращающегося со скоростью не выше 1000 об/мин, достаточна статическая балансировка;

г) если отношение габаритной длины к габаритному диаметру меньше 0,2, достаточна статическая балансировка, такие роторы называются *плоскими*, или *дискообразными*.

д) роторы, уравновешенность которых особо важна, например, в таких устройствах, как гироскопы, требуют динамической балансировки.

Уравновешивание ротора при его конструировании

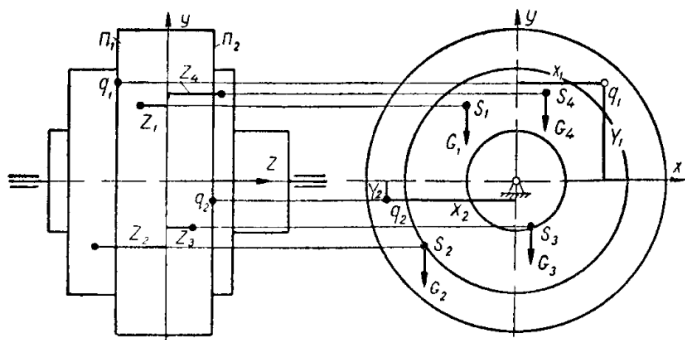
Для того чтобы конструкция ротора была полностью уравновешена, положение масс ротора относительно его оси вращения в любой плоскости, перпендикулярной к этой оси, должно быть симметричным. Естественно, что такое размещение масс ротора далеко не всегда удается конструктору. Поэтому часто бывает необходимо после разработки конструкции ротора расчетным путем определять его неуравновешенность и предусматривать добавочные массы, размещение которых на роторе в процессе его изготовления обеспечило бы получение уравновешенного ротора.

Для расчетного уравновешивания ротора весь его объем разбивают на отдельные объемы правильной геометрической формы.

Не принимаются вовсе во внимание массы ротора, расположенные симметрично относительно оси вращения ротора в любой плоскости, перпендикулярной к ней, так как центробежные силы этих масс полностью взаимно уравновешиваются.

Предположим (фиг. 37), что при таком рассмотрении ротора оказались выделенными объемы известных весов G_1, G_2, G_3 и G_4 с известными центрами тяжести S_1, S_2, S_3 и S_4 . Предположим далее, что наиболее удачными для размещения уравновешивающих масс веса g_1 и g_2 являются плоскости исправления Π_1 и Π_2 , и что в этих плоскостях координаты уравновешивающих масс при выбранной системе координат xuz будут X_1, Y_1 и X_2, Y_2 (ось Z совпадает с осью вращения ротора).

Для того чтобы центр тяжести был расположен на оси вращения, он должен находиться одновременно и в плоскости xz , и в плоскости yz . Для того чтобы центр тяжести находился в плоскости xz , необходимо, как это показано на стр. 27—31, чтобы сумма произведений



Фиг. 37.

масс на расстояния от них до этой плоскости равнялась нулю:

$$\frac{G_1}{g} y_1 + \frac{G_2}{g} y_2 + \frac{G_3}{g} y_3 + \frac{G_4}{g} y_4 + \frac{q_1}{g} Y_1 + \frac{q_2}{g} Y_2 = 0;$$

аналогично для плоскости yz :

$$\frac{G_1}{g} x_1 + \frac{G_2}{g} x_2 + \frac{G_3}{g} x_3 + \frac{G_4}{g} x_4 + \frac{q_1}{g} X_1 + \frac{q_2}{g} X_2 = 0.$$

Центробежные моменты инерции также должны оказаться равными нулю:

$$J_{yz} = \frac{G_1}{g} y_1 z_1 + \frac{G_2}{g} y_2 z_2 + \frac{G_3}{g} y_3 z_3 + \frac{G_4}{g} y_4 z_4 + \frac{q_1}{g} Y_1 Z_1 + \frac{q_2}{g} Y_2 Z_2 = 0.$$

$$J_{xz} = \frac{G_1}{g} x_1 z_1 + \frac{G_2}{g} x_2 z_2 + \frac{G_3}{g} x_3 z_3 + \frac{G_4}{g} x_4 z_4 + \frac{q_1}{g} X_1 Z_1 + \frac{q_2}{g} X_2 Z_2 = 0.$$

Мы получили четыре уравнения:

$$G_1 y_1 + G_2 y_2 + G_3 y_3 + G_4 y_4 + q_1 Y_1 + q_2 Y_2 = 0;$$

$$G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 + G_4 x_4 + q_1 X_1 + q_2 X_2 = 0;$$

$$G_1 y_1 z_1 + G_2 y_2 z_2 + G_3 y_3 z_3 + G_4 y_4 z_4 + q_1 Y_1 Z_1 + q_2 Y_2 Z_2 = 0,$$

$$G_1 x_1 z_1 + G_2 x_2 z_2 + G_3 x_3 z_3 + G_4 x_4 z_4 + q_1 X_1 Z_1 + q_2 X_2 Z_2 = 0.$$

Для удобства расчетов следует плоскость xy выбрать посредине между плоскостями Π_1 и Π_2 , тогда, если d расстояние между ними, то

$$Z_1 = -\frac{d}{2}, \quad Z_2 = +\frac{d}{2}$$

и совместное решение первого и третьего уравнений и второго и четвертого дает выражения произведений q_1X_1 , q_2X_2 , q_1Y_1 и q_2Y_2 :

$$q_1Y_1 = \frac{1}{d} (G_1y_1z_1 + G_2y_2z_2 + G_3y_3z_3 + G_4y_4z_4) - \\ - \frac{1}{2} (G_1y_1 + G_2y_2 + G_3y_3 + G_4y_4);$$

$$q_2Y_2 = -\frac{1}{d} (G_1y_1z_1 + G_2y_2z_2 + G_3y_3z_3 + G_4y_4z_4) - \\ - \frac{1}{2} (G_1y_1 + G_2y_2 + G_3y_3 + G_4y_4);$$

$$q_1X_1 = \frac{1}{d} (G_1x_1z_1 + G_2x_2z_2 + G_3x_3z_3 + G_4x_4z_4) - \\ - \frac{1}{2} (G_1x_1 + G_2x_2 + G_3x_3 + G_4x_4);$$

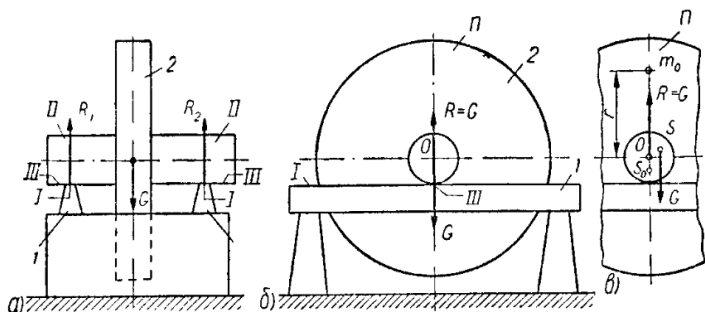
$$q_2X_2 = -\frac{1}{d} (G_1x_1z_1 + G_2x_2z_2 + G_3x_3z_3 + G_4x_4z_4) - \\ - \frac{1}{2} (G_1x_1 + G_2x_2 + G_3x_3 + G_4x_4).$$

Получив значения этих произведений, легко, подбирая q_1 и q_2 , определить такие координаты расположения их центров тяжести $X_1Y_1X_2$ и Y_2 , которые дают приемлемое конструктивное решение.

Статическая балансировка роторов

Статическая балансировка ротора заключается в измерении смещения центра тяжести ротора с оси вращения и в приведении его на ось вращения. Наиболее простым способом измерения статического дебаланса ротора является балансировка на параллелях, или, как еще говорят, на линейках или на призмах. Установка состоит в основном (фиг. 38) из двух параллельных призматических линеек I с горизонтальными гранями I , по которым

может перекачиваться ротор 2. Ротор опирается на линейки либо своими собственными цилиндрическими поверхностями *II*, если они у него имеются, или цилиндрическими поверхностями специальной точно отбалансированной оправки, на которую ротор плотно насаживается своим центральным цилиндрическим отверстием.



Фиг. 38.

Если центр тяжести ротора находится на оси вращения (фиг. 38, *a* и *б*), его сила веса G действует в вертикальной плоскости *П*, содержащей ось вращения ротора O и образующие *III*, которыми ротор опирается на линейки. Действие силы G передается на линейки и вызывает опорные реакции R_1 и R_2 , равнодействующая которых R полностью уравнивает силу G . Такое полное взаимное уравнивание действующих на ротор сил R и G сохраняется при любом положении ротора, так что, если мы медленно перекачим немного ротор и отпустим его, он останется в том положении, в котором мы его отпустили, что будет свидетельствовать о его статической уравновешенности.

Если же центр тяжести ротора не находится на его оси вращения, как показано на фиг. 38, *a* и *в*, сила веса G и равнодействующая R реакций R_1 и R_2 образуют пару сил, которая, действуя на ротор, стремится его катить по линейкам до тех пор, пока центр тяжести ротора не очутится в плоскости *П* в своем крайнем нижнем положении S_0 . Это будет положение устойчивого равновесия ротора на линейках, т. е. такого положения, к которому он стремится вернуться, если мы отклоним его немного от этого положения. Покатывая ротор на линейках и установив его в положение устойчивого равновесия,

отмечаем на нем мелом вертикальную плоскость, проходящую через ось вращения и содержащую центр тяжести ротора в этом его положении. Прикрепляя к ротору на отмеченной линии грузики m_0 из мастики или пластилина разного веса q на разных расстояниях r от оси ротора O , подбираем такие значения веса q и расстояния r , при которых ротор приобретает состояние «безразличного равновесия», свидетельствующего о том, что ротор оказывается статически уравновешенным добавленным грузиком.

Очевидно, что этим самым определяется и смещение s центра тяжести ротора с его оси вращения по приведенной формуле:

$$s = \frac{qr}{G}.$$

Ротор, конечно, необходимо для этого взвесить; расстояние измеряется от оси ротора до центра тяжести грузика.

Точность такой балансировки зависит от ряда факторов: от точности измерения веса грузика и расстояния от его центра тяжести до оси ротора, от горизонтальности опорных граней линейек, от правильности цилиндрической формы опорных шеек ротора и совпадения их геометрической оси с осью вращения ротора (если они не являются рабочими опорными шейками ротора), от сопротивления перекатыванию ротора по линейкам. Ведь перекатывание от неуравновешенности получается в результате действия на ротор пары сил G и R ; если действию этой пары будет оказывать сопротивление сила трения между ротором и линейками, то независимо от наличия этой пары перекатывания не произойдет и мы не сможем обнаружить неуравновешенности.

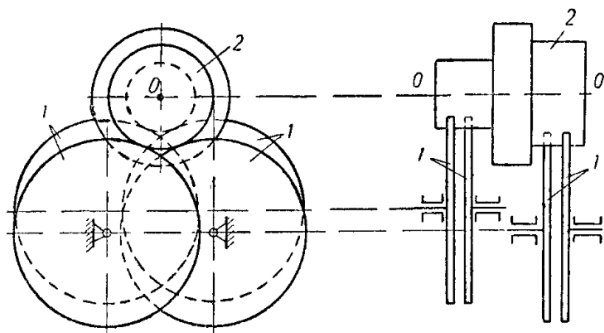
Считается, что статическую балансировку на линейках можно проводить с точностью 0,01 мм остаточного смещения центра тяжести с оси вращения.

Если опорные шейки ротора разного диаметра, пользоваться линейками невозможно, потому что при перекатывании такого ротора по линейкам он будет перекашиваться. Получается это потому, что шейка большого диаметра перекатится по своей линейке на большее расстояние, чем шейка меньшего диаметра по своей линейке при определенном угле поворота ротора. В таком случае

вместо линейек применяются роликовые или дисковые опоры.

На фиг. 39 показано дисковое приспособление, состоящее из четырех дисков 1, тщательно отбалансированных и свободно вращающихся с минимальным трением на своих осях.

Диски смонтированы так, чтобы при балансировке ось OO ротора 2 была горизонтальна. Вместо перекатывания ротора по неподвижным линейкам здесь получается взаимное перекатывание ротора и дисков при неподвижной оси вращения ротора.



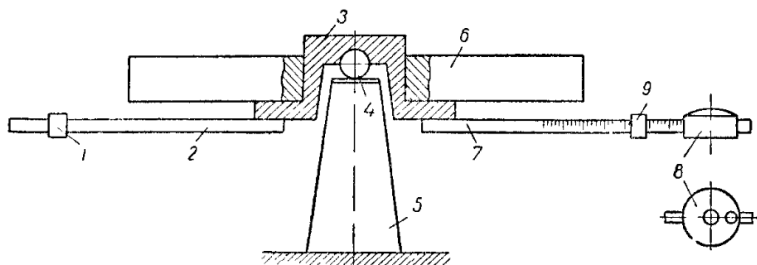
Фиг. 39.

Вместо дисков могут быть использованы подшипники качения. Точность статической балансировки на дисках и роликах несколько меньше, чем на линейках; остаточное смещение может быть доведено до $0,02$ мм. Часто точность $0,01$ мм остаточного смещения оказывается недостаточной; в таких случаях применяются балансировочные веса, дающие большую точность.

Приведем пример одного из возможных вариантов таких весов (фиг. 40).

Подлежащий статической балансировке ротор 6 надевается своим центральным цилиндрическим отверстием (геометрическая ось отверстия должна совпадать с осью вращения ротора) на оправку 3, в которой заделан шарик 4 так, чтобы центр шарика при балансировке оказался на оси оправки. Снизу к оправке прикреплены две линейки 2 и 7 диаметрально противоположно друг другу. По линейке 2 может скользить противовес 1. На конце линейки 7 прикреплен универсальный уровень 8. На ли-

нейке 7 нанесены также деления, вдоль которых может перемещаться ползунок 9. Оправка с ротором и линейкой свободно опирается своим шариком на плоскую горизонтальную верхнюю грань стойки 5. До установки ротора на оправку ползунок устанавливается на нулевое деление (крайнее деление со стороны оси оправки). При этом противовес закрепляется в таком положении, при котором пузырек универсального уровня занимает центральное положение, свидетельствующее о вертикальности оси оправки. Затем ротор надевается на оправку. Если



Фиг. 40.

центр тяжести ротора будет находиться на его оси вращения, сила веса ротора пройдет через точку опоры шарика и оправка сохранит свое положение равновесия. Если же центр тяжести ротора будет смещен с его оси вращения, равновесие оправки нарушится и ее ось отклонится от вертикали; при этом пузырек уровня уйдет из центрального положения. Поворачивая ротор на оправке, подбираем такое его положение, при котором пузырек уровня занимает крайнее дальнее от оси оправки положение, показанное на фиг. 40 во второй проекции, на которой дан вид сверху.

Такое положение пузырька свидетельствует о том, что центр тяжести ротора оказался в вертикальной плоскости, содержащей ось ротора и ось уровня, со смещением в сторону противовеса (положение *S*). Перемещением ползунка 9 приводим пузырек уровня в центральное положение и центр тяжести системы ротор — оправка на вертикаль опорной точки шарика. Так как сама оправка и раньше была отбалансированной, очевидно, что необходимое перемещение ползуна связано только с неуравновешенностью ротора. Перемещение ползуна на рас-

стояние l равносильно удалению его массы в нулевом положении, когда расстояние от ползуна до оси оправки равнялось r , и прибавлению его массы в конечном положении, когда расстояние от него до оси оправки равно $r+l$. Если G — вес ротора, s — смещение его центра тяжести, а q — вес ползунка, получается равенство

$$Gs = qr + q(r + l)$$

или $Gs = ql$, откуда $s = \frac{ql}{G}$.

Зная q , отсчитав по линейке l и определив вес ротора G взвешиванием, получим по приведенному выражению значение смещения s .

Статической балансировкой на балансировочных весах можно достичь точности 0,005 мм остаточного смещения центра тяжести.

Динамическая (полная) балансировка роторов на балансировочных станках

Полное высокоточное уравнивание роторов осуществляется на балансировочных станках. На обычных, неавтоматических, балансировочных станках производится только измерение неуравновешенности ротора; устраняется же неуравновешенность вручную или при помощи вспомогательного оборудования иногда на самом балансировочном станке, но чаще всего в стороне.

Принцип работы балансировочных станков для динамической балансировки заключается в следующем. Приведенный во вращение ротор действует своими неуравновешенными инерционными силами на его подвеску к станине станка. Подвеска деформируется и приходит вместе с ротором в колебательное движение. Амплитуда колебаний зависит от инерционных сил, вызывающих колебания, а эти силы, в свою очередь, зависят от неуравновешенности ротора и его угловой скорости. Таким образом, по амплитуде колебаний опор ротора можно судить о его неуравновешенности.

Развитие балансировочных станков шло по пути совершенствования измерения амплитуд колебаний подвески с ротором.

Для непосредственного, механического измерения амплитуды колебаний (например, обычным индикатором) необходимо, чтобы амплитуда была достаточно

большой. Это достигается вращением ротора с числом оборотов в секунду, близким к собственной частоте колебаний колеблющейся системы, т. е. в резонансе с ней.

Существенным недостатком балансировочных станков, работающих при резонансном режиме, является то, что измеряемая амплитуда колебаний существенно зависит от частоты колебаний и от трения в колеблющейся системе. Частота колебаний неизбежно изменяется, да и величина силы трения в системе далеко не постоянна, вследствие чего при одних и тех же неуравновешенных силах инерции балансируемого ротора, вызывающих его колебания, могут получаться разные амплитуды колебаний, что снижает устойчивость и точность измерений.

В дальнейшем отказались от непосредственного измерения амплитуды колебаний, ограничились малыми амплитудами, которые получаются при частоте колебаний, в несколько раз большей частоты собственных колебаний, но которые почти нечувствительны к изменениям частоты колебания. Для достаточно точного измерения этих малых, порядка сотых и тысячных долей миллиметра, амплитуд применяют разнообразные амплитудомеры, механические и оптические, в которых малые амплитуды значительно увеличиваются, и электрические способы измерения.

Наряду с развитием балансировочных станков, в которых используется колебательный эффект действия неуравновешенных инерционных сил балансируемого ротора, появились станки, на которых измеряют непосредственно усилия, вызываемые в жестких опорах станка неуравновешенными инерционными силами ротора, вращающегося в этих опорах. Существуют еще балансировочные станки с так называемыми компенсирующими устройствами, в которых развиваются силы, уравновешивающие инерционные силы, развиваемые балансируемым ротором.

Значения и направления компенсирующих сил позволяют судить о значении и положении неуравновешенных масс ротора.

В самых простых, наиболее давно известных балансировочных станках подвеска ротора упругая и колебания получаются упругими. В современных балансировочных станках используются упругие и неупругие подвески, совершающие вместе с ротором колебания подобно

маятнику. В современных балансировочных станках широко применяется электроника для определения величины и положения неуравновешенности ротора.

Ротор устанавливается в полуподшипниках, закрепленных в люльке, подвешенной на двух стойках. Стойка монтируется на станине станка в зависимости от расстояния между опорными шейками ротора. В некоторых конструкциях полуподшипники закреплены в двух рамках, подвешенных на струнах к станине станка. Ротор приводится во вращение электромотором, вал которого соединяется с валом ротора карданным валом и муфтами или при помощи накидного ремня.

Неуравновешенность вращающегося ротора вызывает колебания люльки с ротором или стоек с ротором. В специальных устройствах — индукционных датчиках, установленных в двух плоскостях, перпендикулярных к оси вращения ротора и называемых плоскостями измерения, под влиянием механических колебаний возникает переменный электрический ток, поступающий в электрическое измерительное устройство, в котором определяются величины и расположение неуравновешенных масс ротора в плоскостях измерения. В станках имеется электронное решающее устройство, в котором по данным измерительного устройства определяются величины и положения неуравновешенных масс в плоскостях исправления.

Для того чтобы на одном и том же станке можно было измерять существенно отличающиеся значения неуравновешенности, предусматривается переключатель масштабов, т. е. устройство, позволяющее изменять значение одного деления шкалы измерительного и решающего устройства.

Во время работы станка могут возникнуть случайные колебания, которые не связаны с неуравновешенностью ротора, но искажают результаты измерений. Для того чтобы свести к минимуму влияния посторонних колебаний, станки снабжают усилительными и фильтрующими устройствами.

В массовом и крупносерийном производстве на одном балансировочном станке балансируют все время одинаковые роторы и настройку станка приходится производить редко; ее производят по эталонному ротору, предварительно тщательно отбалансированному. Но

в мелкосерийном и единичном производстве и в ремонтной практике на одном и том же балансировочном станке балансируют разные роторы с разным взаимным расположением плоскостей измерения и исправления. При переходе от одного типоразмера ротора к другому необходимо менять настройку решающего устройства. Чтобы облегчить перенастройку станка, предусматриваются устройства электрического эталонирования, позволяющие обойтись без эталонного ротора. Для обеспечения электроэнергией всех электрических устройств имеются источники питания — специальные генераторы со стабилизирующими устройствами, автоматически поддерживающими постоянство параметров их работы.

Сложность электронного оборудования требует высокой квалификации электрика для наладки станка и устранения небольших неисправностей, возможных в процессе эксплуатации.

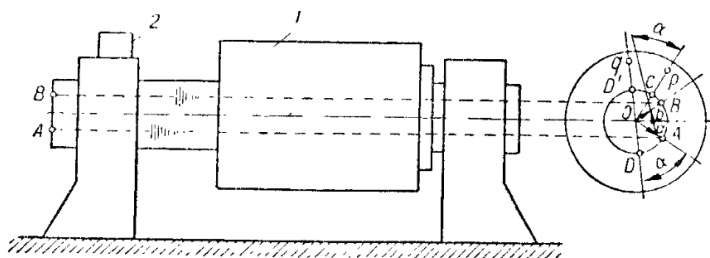
Балансировка роторов в рабочих опорах

Балансировку роторов в собственных опорах производят чаще всего после ремонта машин с тяжелыми роторами, таких, как турбины, электрогенераторы, вентиляторы и др. Для этого применяют специальные приборы, позволяющие измерять вибрацию опор и определять место неуравновешенности. Однако чаще всего пользуются обычным инерционным виброметром. Наиболее практичным является метод отметок, заключающийся в следующем (фиг. 41). На доступной цилиндрической части вала ротора *1* вблизи одного из подшипников наносят тонкий слой мела, разведенного в воде. Машину пускают и доводят до номинального числа оборотов в минуту. На подшипниках устанавливают виброметр *2*. При помощи чертилки, постепенно приближаемой к побеленной части вала, наносят несколько параллельных рисок. Совершающий колебания вал сам задевает подведенную чертилку; подводя ее в трех, четырех местах вдоль оси вращения ротора, получают несколько рисок. Одновременно измеряют амплитуду *a* колебаний. Соединяя после остановки ротора середины рисок, получают черточку, почти совпадающую с одной из образующих цилиндрической поверхности вала, и сносят ее вдоль этой образующей в торец вала ротора, отмечая радиальное

направление OA . Затем прикрепляют опытный грузик в плоскости исправления вблизи места измерений. Вес грузика p выбирают так, чтобы развиваемая им центробежная сила инерции составляла приблизительно одну двадцатую веса ротора:

$$\frac{p}{g} r \omega^2 \approx \frac{Q}{20},$$

где ω — номинальная угловая скорость ротора ($\frac{\pi n}{30}$);
 r — расстояние от центра тяжести грузика до оси вращения ротора;
 Q — вес ротора.



Фиг. 41.

Удобнее грузик прикреплять в радиальном направлении OC , образующем прямой угол с направлением OA в сторону, противоположную вращению. После установки грузика вновь пускают машину и доводят скорость до номинальной. Измеряют амплитуду b колебаний и вновь при помощи чертилки наносят риски, по которым определяют новое направление OB . На листке бумаги вычерчивают окружности и направления OA , OB и OC так, как показано на фиг. 41. По направлению OA откладывают отрезок Oa , а по направлению OB — отрезок Ob так, чтобы отрезки были пропорциональны измеренным амплитудам a и b :

$$\frac{Oa}{a} = \frac{Ob}{b}.$$

Если допустить, что амплитуда колебаний подшипника пропорциональна силе инерции неуравновешенной массы ближайшей к нему плоскости исправления, то отрезок Oa будет представлять собой в некотором масштабе также и вес q неуравновешенной массы в этой плоскости исправления, так как сила инерции пропор-

циональна весу при той же угловой скорости и том же расстоянии r от оси вращения. Отрезок же Ob будет в таком случае равнодействующей силы веса неуравновешенной массы в этой плоскости исправления и силы веса P опытного грузика. Следовательно, отрезок ab — геометрическая разность отрезков Ob и Oa будет представлять собой в том же масштабе силу веса P грузика, которую мы знаем; получается, что

$$\frac{q}{Oa} = \frac{P}{ab}, \quad \text{откуда} \quad q = P \frac{Oa}{ab}.$$

Так как при одной и той же скорости ротора направление колебаний отстает от направления возмущающей силы на какой-то определенный угол, направление OD расположения неуравновешенной массы образует тот же угол α с направлением Oa , что и направление OC расположения опытного грузика с направлением ab . Откладывая $\angle AOD = \alpha$ в ту же сторону, что и сам угол α , получаем направление OD расположения неуравновешенной массы в данной плоскости исправления. Следовательно, уравновешивающий груз q следует расположить в направлении OD' , диаметрально противоположном направлению OD .

То же самое выполняется для второго подшипника ротора и близлежащей ему второй плоскости исправления.

Устранение неуравновешенности и автоматизация балансировки роторов

После того как определились место и величина неуравновешенной массы, необходимо в этом месте удалить неуравновешенную массу или в диаметрально противоположном месте добавить такую же массу. Удаление неуравновешенной массы выполняется чаще всего высверливанием, а иногда и спиливанием. Добавление уравновешивающего грузика производят припаиванием, привариванием или приворачиванием, если это предусмотрено конструкцией ротора. Грузики имеют чаще всего форму пластин. В массовом и крупносерийном производстве к рабочему месту, где производится балансировка, подается целый комплект пластинок разных весов, отличающихся один от другого на величину, равную или

немного меньшую допустимой неточности уравнивания.

В настоящее время и у нас, и за границей созданы и работают полуавтоматические и автоматические балансировочные станки, на которых автоматически производится определение неуравновешенности ротора и ее устранение.

Существуют станки со столь полной степенью автоматизации всей операции балансировки, что они могут работать в автоматических поточных линиях.

Наряду с усовершенствованием универсального балансировочного оборудования, на котором можно балансировать разные по весу и конструкции роторы, появляются специальные и специализированные балансировочные станки, предназначенные для балансировки роторов, конструкция которых не позволяет производить балансировку их на универсальных балансировочных станках. Отечественной промышленностью созданы специальные станки для балансировки карданных валов автомобилей; у этих валов отсутствуют опорные шейки и имеются шарниры, вследствие чего требуется особая конструкция для их установки в балансировочный станок. Также созданы станки для балансировки коленчатых валов, позволяющих распределять уравнивающие массы в нескольких плоскостях исправления, что уменьшает деформацию вала, специальные станки для балансировки роторов гироскопов и гиromоторов в сборе, к балансировке которых предъявляются особые требования в отношении высокой точности.

Развитие оборудования для балансировки идет по пути его полной автоматизации, повышения производительности, повышения точности балансировки и увеличения надежности работы.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Васильев В. С. и Кутко П. С., Станки и приборы для динамической балансировки, Машгиз, 1959.

Киселев П. Л., Вибрация электрических двигателей и методы ее устранения, Госэнергоиздат, 1961 г.

Колесник Н. В. Статическая и динамическая балансировка, Машгиз, 1954.

Шитиков Б. В., Динамическая балансировка роторов, Трансжелдориздат, 1951.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Предисловие</i>	3
Введение	5
Движение и силы в механике	8
Использование сил инерции в технике	48
Уравновешивание сил инерции	72
<i>Рекомендуемая литература</i>	101

Беркович Давид Мойсеевич

Силы инерции в технике и их уравновешивание

Редактор *П. Я. Фурер*. Техн. редактор *М. С. Горностайпольская*

Корректоры *Л. Н. Басовская, Н. З. Лаптева*

Подписано к печати 11/XII 1962. Формат 84 × 108/32. Физ. печ. л. 3,125.

Усл. печ. л. 5,12. Уч.-изд. л. 5,37. БФ № 03039. Тираж 7000.

Зак. № 1603. Цена 16 коп.

Южное отделение Машгиза, Киев, ул. Парижской коммуны, 11.
Харьковская типография Госгортехиздата. Харьков, ул. Энгельса, 11.